PROJET INTERNATIONAL D'ETUDES AVANCEES

« HISTOIRE ET HISTORIOGRAPHIE DE LA DEMONSTRATION MATHEMATIQUE DANS LES TRADITIONS ANCIENNES »

Organisé par Karine Chemla (REHSEIS---CNRS-Université Paris 7)

Sous la double égide de la
Maison des sciences de l'homme
et de
Reid Hall Institute, Columbia University

D'avril à juin 2002, un groupe de chercheurs se sont réunis pour examiner de manière critique l'histoire de la démonstration mathématique dans les traditions anciennes (corpus mésopotamiens, grecs, indiens et chinois) et son historiographie, telle qu'elle s'est formée à partir du XIXe siècle. Le noyau de base en était constitué de Geoffrey Lloyd (Faculty of Classics, Université de Cambridge & Needham Research Institute), Ian Mueller (Université de Chicago), Reviel Netz (Université de Stanford), Dhruv Raina (J. Nehru University, New Dehli) et Karine Chemla (REHSEIS).

Ce groupe a organisé un séminaire de lecture de textes de démonstrations qui a mobilisé les compétences d'un ensemble plus large de chercheurs : pour REHSEIS, Agathe Keller, Christine Proust, Catherine Jami et Tian Miao (une post-doctorante chinoise à l'époque basée à REHSEIS pour un an), Marie-José Durand-Richard ; mais également Alain Bernard, Pierre-Sylvain Filliozat, François Patte, Bernard Vitrac et Alexei Volkov (McGill University, en séjour à Paris en mai 2002). Enfin, ce programme de travail a connu un temps fort avec la tenue d'un colloque international, dont on trouvera le programme en annexe 1 de ce texte.

Les résultats à caractère plus purement historiographique de ce projet sont présentés dans la première partie de ce texte, tandis que la seconde partie synthétise les avancées réalisées en matière d'histoire de la démonstration mathématique.

Elles feront l'objet d'un ouvrage spécifique en cours de préparation.

Historiographie de la démonstration mathématique

L'atelier « Histoire et historiographie de la démonstration mathématique » a consacré une partie notable de ses efforts à élucider le processus au cours duquel a pris forme, au XVIIIe et au XIXe siècles, en Europe, l'idée selon laquelle la démonstration mathématique naîtrait en Grèce et caractériserait l'Occident.

Il était nécessaire, pour ce faire, d'examiner deux aspects : comment la thèse de l'occidentalité essentielle de la démonstration s'est-elle imposée et par quels biais la thèse inverse, posant que l'« Orient » n'avait manifesté aucun intérêt pour la chose, a-t-elle pris forme ? Nos recherches ont montré que de multiples facteurs entraient dans la constitution historique de cette opposition.

La première question relève d'une histoire de la constitution, au XIXe siècle, d'une image de la Grèce classique au sein de deux disciplines : la philologie et la philosophie, dans un contexte marqué, en mathématiques, par la montée de l'axiomatique. A la suite de Wilbur Knorr et dans le contexte d'un débat avec Reviel Netz (Université de Stanford), Karine Chemla avait, dans un article paru en 2000, attiré l'attention sur la manière dont les éditions critiques des textes mathématiques grecs réalisées à la fin du XIXe siècle par Johann Heiberg avaient sculpté les textes d'Euclide et d'Archimède conformément à une image *a priori* des mathématiques de la Grèce classique. Il restait à examiner plus précisément comment ces opérations philologiques, dont dépendent les ouvrages donnant encore aujourd'hui accès à ces documents, avaient traité les démonstrations et avaient donc marqué, à la source, les représentations que nous pouvons nous faire. Dans le contexte de l'atelier, Reviel Netz a analysé la manière dont Heiberg a modifié les textes des démonstrations d'Archimède, élaguant les étapes à ses yeux inutiles et donc en contradiction avec sa représentation du génie propre à Archimède. Il a également montré comment cette option contredisait ce que donne à lire le palimpseste qui représente aujourd'hui l'état connu le plus proche du style d'Archimède. Bernard Vitrac, quant à lui, a mis en évidence comment Heiberg avait régulièrement sélectionné les démonstrations les plus élaborées parmi celles que la tradition manuscrite attribue à Euclide.

Du point de vue de l'histoire de la philosophie, Orna Harari (Université de Tel Aviv) a montré comment, malgré des différences manifestes, s'est élaborée l'idée que les *Analytiques* d'Aristote décrivaient une théorie de la démonstration dont Euclide fournissait l'illustration pratique. Elle a également mis en évidence un tournant entre une lecture ancienne, qui constituait Aristote en référence par rapport à laquelle on évaluait Euclide, et un moment plus contemporain, où Euclide devient le monument par référence auquel il convient d'interpréter Aristote. Orna Harari propose de lire dans ce tournant, amorcé selon elle dans l'œuvre du néo-kantien Edouard Zeller, l'impact de l'apparition de la logique formelle et de la philosophie des sciences. Geoffrey Lloyd a, pour sa part, souligné à quel point l'opération de sélection de certaines sources et de relégation à l'oubli d'autres a contribué à façonner une image distordue de l'activité de démonstration en Grèce ancienne.

A ces contributions au colloque, répondaient celles qui donnaient pour tâche de comprendre comment l'histoire de la démonstration s'est constituée, en particulier au XIXe siècle, en site pour opposer l'Occident au reste du monde et asseoir la preuve de sa supériorité intellectuelle. François Charette (Dibner Institute) a posé le cadre, en étudiant le contraste qui se met alors en place entre une Grèce conceptuelle, logique, rationnelle, étudiant la géométrie de façon axiomatico-déductive, et des « Orientaux » se concentrant sur les calculs, sur l'algèbre et pratiquant, lorsqu'on en admet l'existence, des formes dégénérées de démonstrations (démonstrations illustratives, non rigoureuses (Hankel et Cantor), forme dévalorisée de démonstration algébrique (Hankel), reposant sur l'intuition, l'imagination et les astuces, mais sans méthode). On comprend ainsi pourquoi l'historiographie de la démonstration mathématique présente des relations intimes avec celle du calcul.

Dhruv Raina et Agathe Keller ont cherché, pour l'occasion du colloque, à préciser la formation de cette représentation complexe pour le cas de l'Inde. Agathe Keller montre comment, lorsqu'à la fin du XIXème siècle, le philologue allemand Georges Thibault publie une traduction des plus anciens textes mathématiques connus dans le sous-continent indien, les *Sulbasûtras*, dont la teneur est géométrique, son ouvrage ne parvient pas à modifier l'image, alors si prégnante, qui donne les mathématiques indiennes comme essentiellement arithmétiques. En examinant, en amont, les travaux de mathématiciens et d'orientalistes anglais de Holdwell à Colebrooke en passant par Playfair, Dhruv Raina cherche, lui, à saisir le moment où se constitue progressivement cette représentation, en négatif, des mathématiques de l'Inde comme dénuée de démonstrations euclidiennes, tout en insistant cependant également sur l'émergence, dans ces mêmes milieux anglais, de l'idée selon laquelle l'Inde serait le berceau de l'arithmétique et de l'algèbre. Un des points clefs de cette historiographie, dans ce cas comme pour celui de la Chine, réside dans le désintérêt total que suscitent les commentaires, alors qu'il s'agit précisément du lieu naturel d'explicitation des démonstrations.

Des linéaments d'une nouvelle histoire de la démonstration mathématique dans les traditions anciennes

L'atelier a fait apparaître que les textes grecs, babyloniens, indiens et chinois relevant d'une histoire de la démonstration et jusqu'à présent négligés dans les réflexions sur cette pratique partagent une même caractéristique : ils portent tous sur les nombres et s'attachent le plus souvent à établir la correction d'algorithmes. L'histoire de cette dernière catégorie de textes n'a commencé à être écrite que récemment. La démonstration de la correction d'algorithmes était, elle, un terrain jusqu'à aujourd'hui quasiment vierge. Il se manifeste donc ici un gain clair de nos travaux : nous avons ouvert un nouveau chapitre de l'histoire de la démonstration mathématique.

Plusieurs ouvrages de fond, préparés dans les dernières années par des participants à l'atelier, fournissaient un socle pour avancer dans ce domaine : l'édition critique et la traduction en français des commentaires de Liu Hui et de Li Chunfeng au classique chinois *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques*, réalisées par Karine Chemla et Guo Shuchun (*Les Neuf chapitres*, Dunod, 2004. http://www.dunod.com/chemla/) ; la synthèse sur les mathématiques mésopotamiennes publiée par Jens Hoyrup en 2002 sous le titre *Lengths, widths, surfaces. A portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*, Springer ; la traduction en anglais du commentaire en sanskrit de Bhaskara à l'*Aryabhatiya*, effectuée par Agathe Keller, sous presse ; la préparation par Reviel Netz d'une nouvelle édition critique et d'une traduction des écrits d'Archimède ; la thèse de François Patte sur des commentaires mathématiques sanskrits du XVIe siècle.

Les neuf chapitres et le commentaire de Bhaskara sont les plus anciens écrits connus à aborder explicitement et systématiquement la démonstration de la correction d'algorithmes. Il est crucial de noter qu'il s'agit, dans l'un comme dans l'autre cas, de commentaires, et que ces écrits seconds ont été négligés par les historiens jusque dans les dernières décennies, alors que c'est là que se développe le discours démonstratif tant en Chine qu'en Inde. C'est bien également sur ce type de texte que François Patte, un autre des protagonistes du projet, a lui aussi pu étudier les démonstrations explicitées dans des commentaires sanskrits plus tardifs. La prise en compte de ces nouveaux témoins de l'activité mathématique est donc une condition *sine qua non* du renouvellement du discours sur la démonstration. Il importe plus généralement de mieux connaître cette catégorie de textes que sont les commentaires, afin de resituer dans leur contexte ces autres lieux du développement de la pratique démonstrative.

Ces travaux relatifs à la correction des algorithmes telle qu'elle était appréhendée en Inde et en Chine ancienne rencontrent ceux de Jens Hoyrup sur les algorithmes des tablettes babyloniennes à deux titres (présentation critique de Christine Proust et exposé de Jens Hoyrup au colloque). Tout d'abord, c'est en mobilisant un arsenal herméneutique particulièrement subtil qu'on peut lire, à même la liste d'opérations, l'indication des raisons de sa correction. La question du texte en tant que texte est là encore fondamentale à cette approche. Ensuite, avec ce dernier cas, on dispose d'un corpus qui permet aujourd'hui de formuler de premières réponses d'ensemble à deux questions clefs : qu'est-ce que démontrer la correction d'un algorithme ? Et comment les sources anciennes attestant de cette activité doivent-elles être insérées dans une histoire mondiale de la démonstration mathématique ?

Le travail du groupe a en effet permis d'identifier ce qui nous apparaît aujourd'hui comme les opérations fondamentales de la démonstration de la correction d'algorithmes. Pareil inventaire fournit les moyens de cataloguer celles de ces ressources qui sont présentes dans nos différents corpus et comment elles s'y manifestent. C'est à ce titre que nos recherches ouvrent sur les linéaments d'une histoire internationale.

La première opération fondamentale de la démonstration de la correction d'un algorithme consiste en l'élaboration d'un dispositif permettant de fournir une interprétation du sens des opérations. Les textes mathématiques en chinois classique réservent un terme technique pour désigner ce type de signification. On relève dans les sources divers dispositifs de cette sorte, et il est intéressant de noter que les problèmes, loin de n'être que de simples questions à résoudre, fournissent de fait des domaines d'interprétation procurant les ressources pour expliciter le sens d'opérations. L'articulation d'interprétations successives permet à son tour d'élaborer le sens du résultat. Mais elle offre également un substrat pour identifier que, formellement, une procédure générale est sous-jacente à l'algorithme dont la correction est étudiée. Déterminer qu'un algorithme donné manifeste la forme d'une procédure générale, c'est mettre au jour un second type de sens, auquel les textes de la Chine ancienne réservent un second terme technique. Il s'agit là de la seconde opération fondamentale de la démonstration de la correction d'algorithme. On peut prouver que l'identification des procédures générales à l'œuvre formellement sous tous les algorithmes des *Neuf chapitres* constitue l'un des objectifs majeurs des commentateurs lorsqu'ils s'attellent à l'exégèse. On constate donc que la démonstration a pu être motivée par d'autres objectifs que celui d'emporter la conviction d'un interlocuteur ou d'un public.

La troisième opération fondamentale consiste, une fois établie par un raisonnement une liste d'opérations réalisant la tâche voulue, à la réécrire, en tant que liste d'opérations, en vue de la transformer, à l'aide de transformations valides, en l'algorithme dont la correction est à établir. Il s'agit d'une forme de démonstration algébrique, qui s'appuie non pas sur les transformations de formules, mais sur des transformations de listes d'opérations que sont les algorithmes les unes dans les autres. Elle est à ce titre propre à un contexte algorithmique.

La première opération fondamentale se rencontre dans les tablettes babyloniennes aussi bien que dans les textes chinois comme indiens ultérieurs. Le fait de l'avoir identifiée permet de rendre compte de l'interprétation proposée par Jens Hoyrup des textes d'algorithmes : les procédures étaient rédigées de sorte que leurs opérations renvoient simultanément à la prescription d'un calcul et à l'opération géométrique qui lui donne son sens. Ce faisant, au fil de la procédure, il se construit en parallèle une valeur (face calcul de l'opération) et une interprétation (face justification du même énoncé), interprétation qui, en fin de parcours, donne un sens au résultat et établit la correction de la procédure. On comprend dès lors pourquoi ces textes exigent un mode de lecture singulier. Il s'agit là les formes de démonstration les plus anciennes connues, et elles nous avertissent du fait que l'énoncé même de la démonstration peut recevoir des formulations singulières, puisqu'aussi bien ici, l'algorithme et sa démonstration ne constituent qu'un seul et même texte. Karine Chemla avait également mis en évidence une réfraction dans les textes chinois de cette dualité et de ces phénomènes. Si du point de vue de notre expérience de lecteur, pareils textes peuvent paraître étranges, les travaux récents de psychologie cognitive sur la lecture de consignes montrent à l'évidence que des praticiens utilisent d'autant mieux des procédures qu'ils les comprennent. Nous pourrions donc avoir ici l'élaboration, par une tradition, d'un type de texte pour les besoins d'une mise en œuvre optimale.

Il semble, sous réserve d'inventaire, que seule cette opération fondamentale se rencontre dans le corpus babylonien. La seconde opération, elle, se retrouve dans les premiers textes indiens comme chinois mentionnés, et le fait peut être corrélé à un intérêt particulier envers la généralité, dont les deux traditions témoignent. Etant donné les multiples similarités entre les deux corpus mathématiques, il ne peut être exclu que cette ressemblance au niveau des pratiques démonstratives puisse renvoyer à des circulations entre ces régions du monde. En revanche, au jour d'aujourd'hui, il semble que seuls les commentaires chinois attestent de la troisième opération fondamentale. Ces premiers linéaments d'histoire et ces outils d'analyse ouvrent, on s'en doute, sur de multiples questions nouvelles.

A titre d'exemple, Karine Chemla a commencé à comparer systématiquement les démonstrations de la correction d'algorithmes dans le monde arabe et en Chine. Il y a là, en jeu, la perspective d'approfondir notre compréhension de ce qu'est la démonstration d'algorithme ainsi que la possibilité de comprendre comment cette branche de l'histoire de la démonstration a interféré avec d'autres.

Le travail du groupe a également permis de mettre en évidence que ces pratiques de la démonstration mathématique ont perduré tant en Inde qu'en Chine, parfois jusqu'au XIXe siècle, et qu'elles se sont parfois mêlées à d'autres pratiques, importées d'Occident. Catherine Jami, Tian Miao et Alexei Volkov en ont donné différents exemples pour l'Asie. Le livre en cours de préparation se propose de suivre les linéaments de l'histoire de la démonstration d'algorithmes jusqu'à ces derniers avatars.

Le travail mené au cours de ces quelques mois doit faire l'objet de deux ouvrages (voir plan en annexe 2), consacrés respectivement à l'histoire et à l'historiographie de la démonstration mathématique. Mais les retombées ne s'arrêteront pas là : les ouvrages seront la base d'un site web, édité par K. Chemla, et où les premières réactions des membres du groupe aux différents articles publiés ouvriront une discussion, écrite et organisée sur le support électronique, menée dans l'ensemble de la communauté internationale sur l'histoire internationale et l'historiographie de la démonstration mathématique.

Annexe 1 : Programme du workshop organisé dans le contexte du projet

Fondation Maison des Sciences de l'Homme — Columbia University at Paris
Programme international d'études avancées — Reid Hall Institute for Scholars

L'équipe REHSEIS
CNRS & Université Paris 7

Histoire et historiographie de la démonstration mathématique
dans les traditions anciennes

les 17-18-19 mai 2002

Reid Hall Institute
Columbia University
4 rue de Chevreuse
75006 Paris

Présentation du workshop

L'Europe du 19^{e} siècle a puissamment promu l'idée que la pratique de la démonstration mathématique constituait l'un de ces signes distinctifs qui permettaient d'opposer sur la longue durée l'« Occident » à toute autre « civilisation ». Or, de nombreuses recherches ont récemment mis à mal cette représentation. Certains travaux , portant sur les tablettes babyloniennes du début du second millénaire avant notre ère, sur la Chine ou l'Inde, mettent en évidence des formes de démonstration dans les textes mathématiques les plus anciens qui nous sont parvenus de ces traditions. Ces publications font écho aux études d'hellénistes qui, depuis quelques décennies, soulignent la complexité des pratiques de la démonstration en Grèce ancienne.

Dans ce contexte, ce workshop se donne un double objectif. Nous chercherons tout d'abord à décrire la manière dont les travaux du 19^{e} siècle ont étudié, ou mobilisé, la démonstration mathématique. Et nous nous demanderons dans quels contextes et dans quels milieux s'est formée l'idée que la démonstration mathématique était la caractéristique de l'Occident. Nous confronterons ensuite de manière critique les dernières recherches sur le sujet, aux fins de formuler des cadres de recherche qui permettent d'intégrer l'ensemble de ces faits dans une nouvelle histoire de la démonstration mathématique.

17 mai 2002

9h, Introduction

9h15—11h
Orna Harari-Eschel, Dibner Institute, MIT
"The notion of first principles in Greek logic and Greek mathematics"

11h 15—13h

François Charette, Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, Frankfurt
"The logical Greek vs the imaginative Oriental. Some remarks on the European historiography of "non-Western" mathematics during the period 1820-1920".

14h45 —16h30

Agathe Keller & Dhruv Raina, NISTADS, New Dehli
"A prehistory of Proof in Indology; Indian Mathematics and Astronomy in Playfair and Thibaut."

18 mai 2002

9h—10h30
Geoffrey Lloyd, Needham Research Institute, Cambridge, UK
"Pluralism in Greek 'mathematics'"

10h45—12H45
Ian Mueller, University of Chicago
"On some Greek arithmetical proofs"

12h45—14h30, Pause Déjeuner

14h30—16h
Reviel Netz, Stanford University
"Symbolism and reasoning in Diophantus: preliminary observations"

16h—16h15, Pause

16h15—17h45
Karine Chemla, REHSEIS, CNRS & Université Paris 7
"Technical terms and expressions linked to proof in ancient Chinese mathematical commentaries"

19 mai

9h15 —10h
Alexei Volkov, McGill University, Montréal
"Proof in Chinese mathematics: the argumentation for state exams "

10h—10h15, Pause

10h15—12h
Jens Hoyrup, Roskilde University, Copenhagen
"Mathematical justification as non-conceptualized practice: the Babylonian example"

12h—13h45, Pause déjeuner

13h45—15h30
Karen Tijberg, Darwin college, Cambridge, UK
"Demonstrative Practices in Hero of Alexandria"

Discussion

Annexe 2 : ouvrages en préparation

BOOK 1
250 pages

THE 19TH HISTORIOGRAPHY OF MATHEMATICAL PROOF
History and historiography of mathematical proof in ancient tradition

Introduction, K. Chemla

1. ***Shaping ancient Greek mathematics in the 19th century***

1.a *The critical editions*

1.a1. Bernard Vitrac (CNRS), *Heiberg shapes Euclid*

1.a2. Reviel Netz (University of Stanford), *Heiberg shapes Archimedes*

1.a3 Ken Saito (Osaka Prefecture University), *The manipulation of figures and texts in Heiberg's critical editions*

1.b *The philosophers' contributions*

1.b Orna Harari (Tel Aviv University), *The 19th century revision of the relation Aristotle—Euclid*

2 ***Forming views on the "Others" on the basis of mathematical proof***

2.a Dhruv Raina (Jawaharlal Nehru University, New Delhi), *The 18th century British scholars' vision of proof in India*

2.b Agathe Keller (REHSEIS), *Representing geometry in India in the age of axiomatics*

2.c François Charette (Dibner Institute, MIT) *The 19th century emergence of the idea that "The Others have no proof"*

BOOK 2

HISTORY OF MATHEMATICAL PROOF IN ANCIENT TRADITIONS: THE OTHER EVIDENCE

A SOURCE BOOK
450 pages

Introduction, K. Chemla

1 ***The variety of Greek practices***

Geoffrey Lloyd (NRI, Cambridge), *Pluralism in Greek "mathematics"*

Karen Tybjerg (Darwin college, Cambridge) and Serafina Cuomo (Imperial College), *Reading demonstrative practices in Hero of Alexandria*

2 ***Proving with numbers***

2.a *In Greece*

2.a1 Ian Mueller (University of Chicago), *Reading Nicomachos and Euclid on numbers*

2.a2 Reviel Netz (Stanford University), *Diophantos and the writing of proofs*

2.b *Proving the correctness of algorithms*

2.b1 Jens Høyrup (Roskilde University), *Reading justifications in Babylonian algorithms*

2.b2 Christine Proust (REHSEIS), *How to interpret the application of reverse algorithms in some Mesopotamian texts?*

2.b3 Karine Chemla (REHSEIS-CNRS), *Reading proofs in Chinese commentaries*

2.b4 Agathe Keller (REHSEIS), *Reading argumentations in Indian commentaries*

3 ***The later persistance of traditions of proving in Asia***

3.a *Late evidence of traditions of proof*

3.a1 François Patte (University Paris V), *Proofs in 16th century Indian commentaries*

3.a2 Alexei Volkov (McGill University, Canada), *Proof in mathematics from China and Vietnam: the argumentation for state examinations*

3.b *Interactions of various traditions of proving in Asia*

3.b1 Tian Miao (Academy of science, Beijing), *Li Rui between Euclid and Liu Hui*

Conclusions