Programme International d'Etudes Avancées de la Fondation

Maison des Sciences de l'Homme

Reid Hall-Columbia University Institute for Scholars

LES FONDATIONS DES MATHEMATIQUES AU XIXe SIECLE: ENTRE HISTOIRE, PHILOSOPHIE, EPISTEMOLOGIE ET COGNITION

Rapport sur le thème

Justification des pratiques mathématiques et fondements des mathématiques

(1^{er} avril 2004-30 juin 2004)

Philippe Nabonnand & Dominique Flament

Laboratoire de Philosophie et d'Histoire des Sciences – Archives Poincaré – UMR 7117 CNRS.

Rapport général

I. Déroulement des rencontres

Le groupe de travail réuni dans le cadre du programme IPAS autour du thème « *Justification des pratiques mathématiques et fondements des mathématiques* » est constitué de huit membres : Jacqueline Boniface (Nice), José Ferreiros (Séville), Dominique Flament (MSH Paris – coordinateur), Sébastien Gauthier (Paris VI), Catherine Goldstein (CNRS Paris), Javier Legris (Buenos Aires), Philippe Nabonnand (Nancy – coordinateur) et Klaus Volkert (Cologne). Il s'est réuni tous les mercredis et jeudis des mois d'avril, mai et juin 2004 pour des séances collectives de travail et de lecture. Chaque demi-journée était confiée à un membre du groupe de travail qui proposait un programme de discussion ou de lecture. Ainsi, une séance ou plusieurs séances ont été consacrées à la justification logique chez Frege (J. B.), à la théorie des diviseurs chez Kronecker (J. B.), la crise des fondements (J. F.), à la notion de style en mathématiques et à l'opposion entre mathématiques figurales et mathématiques conceptuelles (J. F), au logicisme de Dedekind et Hilbert (J. F.), à une analyse générale de l'émergence de la question des fondements au 19^{e} siècle (J. F.), à l'algèbre comme science du temps pur chez Hamilton (D. F.), à la géométrisation par Klein des « nombres idéaux » de Kummer (S. G.), à l'arithmétisation des mathématiques (C. G.), aux nombres idéaux chez Kummer (C. G.), aux conceptions originales de Hermite en arithmétique (C. G.), sur les méthodes quantitatives en histoire des mathématiques (C. G.), à la distinction entre calcul et langage en histoire de la logique (J. L.), à la question de la connaissance symbolique en histoire de la logique et en histoire des fondements des mathématiques (J. L.), aux conceptions logiques de Schröder (J. L.), au principe de continuité chez Poncelet (P. N.), à la rhétorique de Chasles (P. N.), à la question des monstres et des contre-exemples en analyse (K. V.), à la quatrième dimension au 19^{e} siècle (K. V).[1]

En outre, les travaux du groupe de travail ont donné lieu à deux journées d'études (les 16 et 17 juin 2004 à la Maison Suger et à Reid Hall) sur le thème « Fondements et justification des pratiques mathématiques » qui ont réuni (sur les deux journées) douze conférenciers et une quarantaine de participants.[2] Par ailleurs, les membres du groupe ont

[1] Pour plus de détails sur ces exposés et lectures, voir l'annexe n°1 consacrée aux rapports individuels des membres du groupe de travail.
[2] Pour plus de détails, on peut consulter le programme de ces journées dans l'annexe 2.

donné dans divers séminaires ou colloques, des conférences (21) sur des sujets plus ou moins proches de la thématique du groupe de travail. On signalera la conférence de Klaus Volkert, *Henri Poincaré und seine Vermutung*, dans le cadre prestigieux de la *Gauss Vorlesung der DMV in Münster* et la participation de trois membres du groupe de travail au colloque *Henri Poincaré, 1854-1912, a meeting to celebrate the 150th anniversary of the birth of Henri Poincaré* à Milton Keynes (G. B.).[3] Certains membres du groupe ont assisté à des colloques à l'institut Henri Poincaré, au collège de France ou ont participé à des séminaires ou des groupes de travail (Rehseis, Histoires de Géométries, Séminaire d'Histoire des Mathématiques).

On peut encore rappeler que les membres du groupe de travail ont ou vont participer au programme « *Conversations savantes* » au sein du projet « *Les archives audiovisuelles de la recherche en sciences sociales et humaines* » (développé au sein de la MSH par l'équipe sémiotique cognitive et nouveaux médias).

Un rythme de travail aussi intense n'a pu être maintenu que dans le cadre d'un programme comme IPAS. On ne peut qu'insister sur la nécessité d'offrir aux chercheurs des moments de réflexion collective et de multiplier des initiatives comme celles-ci. À cet égard, nous tenons à souligner la qualité de l'accueil et l'excellence des conditions de travail offertes par la Maison des Sciences de l'Homme et par Reid Hall.[4]

II. La thématique et l'état des travaux

L'objectif de ce projet était de reconsidérer l'histoire (qualifiée dans ce qui suit de convenue) de la théorie des fondements des fondements.[5] Pour cela, il nous fallait une modalité d'entrée dans les textes et les travaux des mathématiciens du 19e siècle qui nous permette de mettre en œuvre d'autres éléments tels que « la recherche de la rigueur », « l'arithmétisation », « la réduction logico-déductive », etc. pour envisager une nouvelle reconstruction de la genèse de la théorie des fondements, plus proche de la pratique des mathématiciens, tenant mieux compte des débats et des divers points de vue qui traversent la communauté des mathématiciens.

3 Pour plus de détails, voir l'annexe n°3.

4 L'efficacité et la disponibilité du secrétariat du programme IPAS (MSH), des équipes de la Maison Suger et de Reid Hall ont été un facteur déterminant pour le bon fonctionnement du groupe de travail et sa créativité.

5 Le projet de recherche déposé en 2003 est reproduit dans l'annexe n°4.

Dans ce dessein, nous avons choisi de nous intéresser aux pratiques de justification des mathématiciens. Une telle étude n'a pas encore été faite : on ne trouve dans la littérature aucune étude sur les aspects rhétoriques des discours des mathématiciens et encore moins sur les liens qu'une telle rhétorique entretient avec l'épistémologie ou l'ontologie du ou des mathématiciens qui la mettent en œuvre. On peut comprendre cette absence de travaux en soulignant qu'une étude des textes et travaux de mathématiciens par le biais de la justification et de la rhétorique est considérée comme « trop externaliste » pour les tenants de l'approche internaliste et comme trop internaliste pour ceux de l'approche externaliste !

S'intéresser à la « justification en mathématiques » peut dans un premier temps sembler provocant et même très (trop) présomptueux: les mathématiques ne sont-elles pas la discipline dans laquelle les nouveaux résultats sont justifiés par des démonstrations ?, les mathématiques ne sont-elles pas une discipline parfaitement fondée et les fondements des mathématiques ne sont-ils pas là pour justifier les méthodes (essentiellement déductives) et les propositions premières ? De ce point de vue, le corpus envisagé serait la quasi-totalité des textes mathématiques. Certes, nous sommes concernés avec notre problématique de la justification par les questions de preuves ou de fondements, mais essentiellement lorsque les mathématiciens expriment le besoin de justifier l'utilisation d'une méthode de preuve, d'un principe fondamental … En effet, avec ce programme de recherche autour des pratiques de justification en mathématiques, ce qui nous intéresse est de proposer une réponse à la question : qu'est ce que signifie « justifier ce que l'on fait » en mathématiques ?

Comme l'un des premiers objectifs de cette recherche est de comprendre comment les pratiques de justification ont modelé l'activité de fondements, nous nous intéresserons aux discours de justification en mathématiques au cours du 19^{e} siècle. En effet, les questions de fondements et celles du rapport entre logique et mathématiques sont à la fin du 19^{e} siècle l'occasion de nombreuses discussions et discours dans lesquels les mathématiciens tentent de définir ce que doivent être les mathématiques et de proposer des normes à la pratique mathématicienne. Les arguments avancés dans ces discussions s'inscrivent dans des lignes argumentatives qui sont développées tout au long du 19^{e} siècle. En suivant les trajectoires de ces lignes, nous proposerons une reconstruction de l'histoire des fondements qui, à la différence de l'histoire convenue, sera inscrite dans la pratique des mathématiciens du 19^{e} siècle et dans les débats qui traversent à cette époque cette communauté.

Mais il y a quantité d'autres circonstances ou d'autres questions qui amènent les mathématiciens à produire des discours de justification. Se posent alors une série de questions que nous étudierons dans un premier temps dans le cadre des mathématiques du 19^{e} siècle :

- *Que justifie-t-on en mathématiques ?*

On peut trouver de nombreux exemples de justification d'une notion (quatrième dimension, les éléments imaginaires, …). Justifier une notion mathématique selon les différents auteurs peut signifier justifier l'utilisation de cette notion, lui donner un statut. Dans cette perspective, les analyses en termes d'outils ou d'objets (Daston, Gallison, Epple, …) peuvent être très fécondes. On peut aussi justifier l'extension ou la signification d'une définition, d'un théorème ou d'un principe (par exemple, la définition de fonction continue et la discussion concernant les contre-exemples aux diverses définitions) ; on peut aussi citer dans cet ordre d'idée la discussion autour du principe de continuité (Lacroix, Poncelet, Gergonne, Cauchy, …). Les questions du statut d'une théorie, d'une méthode ou d'un point de vue nécessitent souvent (lorsqu'ils apparaissent ou sont concurrencés par exemple) sont autant d'occasion de discours de justification (les géométries non-euclidiennes, la théorie des ensembles, la réduction logiciste mais aussi par exemple, la défense du point de vue « synthétique » en géométrie ou l'exclusion des arguments géométriques en analyse, ou encore, l'exigence de rigueur dans les questions de convergence en analyse. Plus généralement, le choix d'un point de vue méthodologique et/ou conceptuel nécessite une discussion qui relève de la justification : par exemple, l'adoption du point de vue « moderne » que représentent les conceptions ensemblistes, la justification du point de vue complexe (rendre compte de l'utilisation d'entités « imaginaires » ou « complexes »), la justification de certains types de preuves (preuve non effective, utilisation du principe de continuité, argument de la diagonale, récurrence transfinie).

Le choix d'une notation (par exemple, la présentation vectorielle des équations différentielles) ou simplement la pertinence d'un problème sont aussi des occasions de justifications. On retrouve des discours de justification lorsqu'il s'agit de discuter du sens de certaines procédures : ainsi, la discussion sur la signification à accorder à l'idée de calculer avec des 'objets' géométriques (Monge, Grassmann, Hamilton, Möbius, …).

Enfin, une trame historique intéressante est de suivre au contraire les notions, les méthodes et les points de vue qui ne demandent pas (plus) de justification. On se proposera par exemple de relire l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann en interrogeant les « non-dits » d'un auteur qui avait l'intention de « tout dire ».

- *Quand justifie-t-on en mathématiques ?*

L'émergence de nouveaux domaines, de nouvelles questions, de nouvelles méthodes ou de nouveaux points de vue sur une question ou plus généralement sur les mathématiques sont les moments privilégiés pendant lesquels les mathématiciens doivent justifier les innovations par rapport aux pratiques et/ou conceptions antérieures, démarquer les notions, méthodes, conceptions nouvelles des anciennes (l'émergence des géométries non-euclidiennes, de la géométrie projective, l'apparition du point de vue ensembliste, l'utilisation des nombres idéaux, l'arithmétisation de l'analyse et de l'algèbre, Poincaré et la topologie en dimension supérieure à 3, …). Mais la nécessité de discours justificateurs se fait sentir aussi lorsque la spécificité d'un domaine, ses méthodes sont critiquées et remises en cause (les contre-exemples en analyse, la question de la rigueur, celle de l'utilisation des séries divergentes, la géométrie euclidienne, les crises des fondements ou dans un domaine très proche des mathématiques comme l'astronomie, l'utilisation d'algorithmes non convergents).

Dans cet ordre d'idées, la question de la spécificité des pratiques (et des discours) de justification au 19e siècle par rapport à l'importance et l'émergence des questions de fondements, de l'apparition de la logique moderne ou des questions d'application des mathématiques en physique mathématique et théorique, nous apparaît essentielle et fera l'objet d'une attention particulière à travers un certain nombre d'études de cas.

- *Comment et pourquoi justifie-t-on en mathématiques ?*

On peut dégager un certain nombre de lignes argumentatives comme celles de la généralité, de la rigueur, de l'utilité, de la tradition, de la simplicité, de la nouveauté, de la naturalité, de l'élégance, de l'esthétique, de la fécondité, … Les discours de justification empruntent à ces lignes pour organiser leur(s) stratégie(s) argumentative(s). Une première étude consiste à analyser les effets rhétoriques de ces arguments et leur position dans le discours : arguments d'autorité, historique, esthétique, philosophique, … L'appartenance à une école, une tradition ou de manière plus ténue, l'adhésion à un style sont-elles peu ou prou corrélées à l'utilisation d'une classe d'argument ? Ainsi, en première approche, on peut évoquer que les géomètres du début du 19e siècle qui défendent un point de vue synthétique utilisent pour la plupart des arguments de généralité alors que les mathématiciens qui tentent d'imposer une nouvelle méthodologie en analyse invoquent le plus souvent l'idée de rigueur.

Une telle analyse nécessite de tenir compte du destinataire du discours : quel public, quels lecteurs sont-ils visés ? L'exemple de l'analyse des modes d'exposition de Minkowski de ses travaux en géométrie des nombres selon qu'il s'adresse à Hermite ou à un public moins averti à Chicago est de ce point de vue particulièrement éloquent

Cependant, ces arguments ne relèvent pas d'une simple rhétorique et sont sous-tendus par des positions épistémologiques et même ontologiques. Ainsi, en géométrie projective, la ligne argumentative de la généralité défendue par différents auteurs n'est pas chargée épistémologiquement de la même manière selon qu'il s'agit de généraliser une démonstration obtenue dans un cas particulier (Poncelet) ou d'unifier un certain nombre d'énoncés obtenus dans différents cas (von Staudt).

Une approche plus indirecte de ces questions consistera à étudier la population des mathématiciens-justificateurs, à analyser à quels types de publications ils réservent leurs discours de justification (articles dans les journaux scientifiques, de vulgarisation, préfaces de traités ou de manuels) ; quel statut accorder aux discours de justification que l'on trouve dans les correspondances, dans les *Nachlass* ? L'idée de discours de justification à usage restreint ou privé est-elle pertinente ? Enfin, l'exemple de Minkowski évoqué ci-dessus montre entre autres que l'on ne peut se cantonner aux discours explicites de justification mais que le choix d'une exposition relève aussi de notre analyse.

L'approche de l'histoire des mathématiques par la question de la justification des pratiques révèle souvent une volonté d'établir des normes, de définir ce que sont les « bonnes » mathématiques ou de manière plus modérée, les mathématiques « acceptables ». Ainsi, une bonne partie de l'impulsion du mouvement d'arithmétisation de l'analyse vient de la volonté d'exclure tout recours à l'intuition géométrique et donc aux arguments géométriques.[6] L'émergence de la notion de transformation géométrique est due (en partie) à la présentation de la géométrie projective comme géométrie des formes géométriques.

L'étude des pratiques de justification en mathématiques est donc une approche qui promet d'être extrêmement féconde pour appréhender la vision de leur domaine ou de leur discipline qu'avaient les mathématiciens du 19e siècle et par-là renouveler une bonne part de l'historiographie convenue de cette période.

---

[6] L'exemple d'Hermite montre que le refus des arguments géométriques n'implique pas en revanche une quelconque adhésion au programme d'arithmétisation de l'analyse. Voir le rapport de C. Goldstein dans l'annexe n°1.

Un autre intérêt de cette approche est de s'interroger sur l'influence que les pratiques de justification exercent sur « la manière de faire des mathématiques », de poser la question : dans quelle mesure, comment et dans quels domaines plus particulièrement, les modes de justification modèlent la pratique des mathématiques ? En interrogeant de la sorte les discours de justification, on fait apparaître par exemple, que le terme « arithmétisation » a plusieurs acceptions et recouvre plusieurs manières d'aborder les questions d'analyse, d'algèbre ou d'arithmétique, que l'exigence de rigueur a sinon ses détracteurs, du moins ses critiques et non des moindres (Poncelet, Hermite, Poincaré), que l'émergence d'une discipline est souvent précédée d'un « point de vue sur les problèmes » et que les discours de justification de ce point de vue modèlent les voies d'autonomisation du domaine (géométrie projective, topologie, …)

Bien entendu, cette perspective est particulièrement sensible pour la question des fondements des mathématiques ; ce qui, dans un premier temps, constituera l'axe principal de notre programme de recherche :

- Quelle part de l'activité de justification participe de la naissance de la question des fondements en tant que domaine autonome ?
- Discours de justification de la présentation axiomatique en géométrie (Géométries non -euclidiennes/discussion du statut philosophique des axiomes ; GNE/non-contradiction des axiomes, géométrie projective/exclusion de toute intuition métrique ; géométrie euclidienne-GNE/suffisance des axiomes, …)
- Discours sur la pureté des méthodes, de la discipline (analyse sans/avec géométrie, algèbre sans/avec géométrie, géométrie sans/avec analyse), organisation du champ (Ohm, v. Staudt, Bolzano, Grassmann, Hermite ?), analyse/synthèse (géométrie, Duhamel)
- Justification des existences ou du statut d'entités mathématiques : infiniment petits en analyse, éléments à l'infini, éléments imaginaires en géométrie, nombres négatifs, imaginaires, idéaux en algèbre, …
- Constructibilité/création (Kronecker, Kummer, Dedekind and co ; Hamilton et la réception des quaternions), cré-action et/ou l'émergence du point de vue pragmatiste (Peirce, Poincaré, …), moderne-abstrait/formel-conceptuel, notion de mathématiques figurales, existences réelle/formelle
- En géométrie projective, changement de plans conceptuels : des situations géométriques aux énoncés ; d'autres exemples de l'apparition d'un point de vue linguistique en algèbre (et analyse) peuvent être trouvés dans le passage d'une théorie des grandeurs à une théorie des opérations et des relations.
- La relation logique-mathématique : calcul/langage ; représentations « mathématiques » de la logique (Boole, Schröder ?) ; logique symbolique et fondements des mathématiques

- Les échecs de tentative de fondements (lignes argumentatives de défense et de critique) : Poinsot et sa tentative de fonder l'arithmétique sur la combinatoire, l'école de Hindenburg, …
- Mathématiques fondées/mathématiques justifiées
- Permanence d'une activité de justification à côté de celle des fondements ? Importance pour la philosophie ?

III. Perspectives

Le groupe de travail a décidé à l'issue de ses travaux de poursuivre son programme de recherche en rédigeant un ouvrage sur les pratiques de justification en mathématiques et les fondements des mathématiques. L'ouvrage comportera une introduction (rédigée par Dominique Flament et Philippe Nabonnand) justifiant l'intérêt historiographique de la notion de justification et une dizaine d'études de cas rédigées par les participants au groupe de travail. Dans ces études de cas, les auteurs insisteront sur le rôle primordial des pratiques et des formes de justifications des notions et des méthodes dans la genèse de la théorie formelle des fondements des mathématiques.

- *Plan de l'ouvrage projeté :*

1. Javier Legris, *Deux approches des relations logique-mathématiques : Frege et Schröder* [D. F.]
2. Jacqueline Boniface, *La justification des principes et de la méthode axiomatique* [J. L.]
3. Philippe Nabonnand, *La généralité en géométrie : Poncelet, Chasles, von~Staudt et Pasch* [C. G.]
4. Klaus Volkert, *Comment justifier l'introduction des cas pathologiques et bizarres* [J. B.]
5. Dominique Flament, Philippe Nabonnand, Klaus Volkert, *Les éléments imaginaires* [S. G.]
6. Jacqueline Boniface, José Ferreiros, Catherine Goldstein, Sébastien Gauthier, *Idéaux et éléments idéaux – Justification des points de vue ensembliste : Cantor-Dedekind-Riemann* [P. N.]
7. José Ferreiros, *Justification du point de vue ensembliste : Cantor – Dedekind – Riemann* [D. F.]
8. Dominique Flament, *Grassmann-Hamilton : nombres, construction, engendrement, création* [C. G.]
9. Sébastien Gauthier, *Des exemples de justification de l'introduction de la géométrie en arithmétique* [K. V.]
10. Catherine Goldstein, *Le cas « Hermite »* [J. F.]

Notre ambition est d'écrire un authentique livre collectif. Non seulement, chaque partie du livre sera lue et critiquée par tous les autres auteurs (forum, réunion du groupe de travail, …), mais chaque étude de cas sera discutée plus particulièrement par un membre du collectif qui jouera à la fois le rôle de « naïf » (afin d'assurer une lisibilité minimale à l'ouvrage) et celui plus classique de « rapporteur ».[7] Une première version de l'introduction et de chaque étude de cas devrait circuler (entre les membres du groupe) en mai 2005. Une rencontre du groupe est prévue en septembre ou octobre 2005 dans le cadre du CIRM[8] (Luminy).

[7] Le rapporteur est indiqué entre crochets dans le plan de l'ouvrage.
[8] Centre International de Recherches Mathématiques.

Annexe n°1 : Rapports individuels des membres du groupe de travail

1) Jacqueline Boniface (Université de Nice)

Ma participation au projet a essentiellement consisté en deux exposés, effectués dans le groupe de travail, et une conférence, faite lors du colloque final. J'ai également contribué à la mise en place du sommaire d'un ouvrage commun.

Mon premier exposé a porté sur la justification logique chez Frege. Le but de Frege était de fonder l'arithmétique dans la logique. Son travail de fondement comprend deux axes : d'une part s'assurer de la rigueur de l'enchaînement déductif des preuves, d'autre part rendre compte des définitions et principes premiers. Ces deux axes supposent une justification logique. Il s'agissait dans mon exposé d'examiner chacun de ces deux axes. Cet examen passait par une précision du rapport entre logicisme et psychologisme, ou encore entre objectivité et subjectivité. Il demandait aussi, concernant les notions kantiennes d'a priori et d'a posteriori, d'analytique et de synthétique, déjà renouvelées par Bolzano, de déterminer la position frégéenne. La justification des définitions et des principes premiers conduisait également à distinguer les conceptions de Frege concernant l'arithmétique et la géométrie. Les axiomes de la géométrie sont pour Frege, comme pour Kant et à la différence de Bolzano, des propositions basées sur l'intuition de l'espace et qui donc ne demandent pas une justification logique. Les principes ou lois de l'arithmétique, au contraire, sont des propositions logiques. Ces lois fondamentales demandent une justification logique qui s'oppose à une justification après coup, laquelle ne pourrait entraîner qu'une certitude expérimentale. La justification logique des démonstrations, quant à elle, s'oppose au régime de l'évidence qui entraîne l'assentiment, la « conviction morale », mais ne suffit pas à « fonder » les vérités.

Le second exposé s'est effectué dans le cadre d'une journée sur la notion d'idéal. J'ai pour ma part traité de la théorie des diviseurs de Kronecker, que l'on peut considérer comme une alternative algorithmique à la théorie des idéaux de Dedekind.

Ce qui est à l'origine des travaux de Dedekind et de Kronecker est une création du maître et ami de Kronecker, Ernst Kummer, avec qui, et en compagnie de Weierstrass, il dirigea le séminaire de mathématiques à Berlin. Kummer avait eu l'idée d'introduire dans les domaines de nombres complexes qu'il étudiait des nombres, qu'il nomma idéaux, afin de récupérer une propriété fondamentale des nombres entiers, qui n'était plus valable pour certains nombres complexes (plus précisément certains anneaux cyclotomiques), la propriété de décomposition unique en nombres premiers. Il comparait ces nombres idéaux, qui entraient comme facteurs non isolables dans la décomposition des nombres complexes qu'il étudiait, aux radicaux non isolables de certains composés chimiques. Tout en admirant sa création, Dedekind et Kronecker n'en sont pas totalement satisfaits. Tous deux reprochent à la création kummérienne son caractère fictif, tous deux vont travailler à la remplacer par un objet véritable. Dedekind remplacera les nombres idéaux de Kummer par ce qu'il appellera des idéaux en hommage à son prédécesseur, Kronecker les remplacera par ce qu'on nomme « les diviseurs de Kronecker ». Le but de mon exposé était de comparer les deux styles mathématiques, de Dedekind et de Kronecker, à partir du concept de corps (domaine de rationalité selon Kronecker), puis de mettre en évidence le caractère algorithmique de la notion de diviseur.

Ma conférence lors du colloque final portait sur la justification axiomatique chez Hilbert. Par justification axiomatique j'entendais d'abord la justification des axiomes d'un système particulier, comme l'arithmétique. Cette justification elle-même, chez Hilbert, est de type *axiomatique,* elle fait partie de la méthode axiomatique et consiste essentiellement en une preuve de non-contradiction du système. Elle s'oppose à la justification logique, de Frege en particulier.

La justification axiomatique peut aussi s'entendre dans un second sens comme justification *visée* par l'axiomatique. Ce que vise à justifier l'axiomatique de l'arithmétique est le contenu des mathématiques abstraites. Il s'agit pour Hilbert de justifier et ainsi de sauvegarder la partie des mathématiques contestée par les critiques intuitionnistes. Cette justification rendue possible par l'axiomatique, procède sur le mode finitiste et permet de légitimer un contenu utilisé de façon « naïve », sans avoir « conscience de sa pensée », c-à-d sans justification.

C'est dans le prolongement du travail de fondement de Frege et de Dedekind qu'Hilbert situe son projet d'axiomatisation de l'arithmétique. Il reconnaît à la fois l'intérêt des recherches de ses prédécesseurs et leur échec, et pense pouvoir apporter à ce problème de fondement une solution par la démonstration de la consistance du système de l'arithmétique. Une première ébauche de cette démonstration avait été établie en 1904, à l'occasion du congrès des mathématiciens qui eut lieu à Heidelberg. Cette ébauche s'avérant insatisfaisante, et ayant provoqué notamment les critiques de Poincaré, Hilbert met alors en place une théorie de la démonstration dont la visée est de résoudre ce problème. Dans mon exposé, je me suis attachée à préciser cette justification du système axiomatique, dévolue à la théorie de la démonstration, en la comparant à la justification logique de Frege.

Le système axiomatique justifié par une preuve de non-contradiction devra, et c'est le second point, justifier lui-même le contenu de l'Analyse. La méthode hilbertienne a en effet, à répondre à la critique de Weyl et de Brouwer, qui contestent le fondement donné jusqu'alors à la notion de nombre ainsi que les méthodes non constructives utilisées en mathématiques, et proposent une solution radicale ; l'élimination du contenu mathématique obtenu de façon non constructive, notamment tout ce qui nécessite l'utilisation, jugée illégitime, de l'infini. Or, en Analyse le rôle de l'infini est déterminant et les restrictions proposées par Weyl et Brouwer conduiraient à une véritable mutilation de la discipline. Hilbert refuse cette mutilation et va la combattre avec détermination. Sa solution fait fond sur l'introduction d'un axiome, l'axiome transfini. Cet axiome légitime les propositions universelles et existentielles et posant leur équivalence à des propositions portant sur un seul individu. La seconde partie de ma conférence était un commentaire détaillé de l'introduction de cet axiome.

Ma participation au projet de livre concernera en particulier le chapitre sur les idéaux et le chapitre Bolzano, Frege et Cauchy.

J'ai par ailleurs participé, le 17 mai 2004, à une journée d'étude sur Quine et la logique, organisée à l'Université de Nice par Ali Benmakhlouf. Mon exposé avait pour titre : L'indifférence de l'ontologie.

2) José Ferreiros (Université de Séville)

The discussions held in the context of our IPAS research project, 'The Foundations of Mathematics in the 19th Century: Between history, philosophy, epistemology and cognition', have been extremely rich and enlightening. The experience certainly has helped confirm my expectations that an interaction with colleagues like this one, based on intense journeys of study during a prolonged period, helps establish a kind of exchange that greatly surpasses what can be afforded by alternatives like a congress. The meeting together of scholars from diverse countries, backgrounds, and expertise is also a form of interaction that has no equivalent on a more local basis. For all these reasons and more, I can only look forward to future opportunities of the same kind.

Out of our discussions has emerged the necessity to embed the analysis initially envisaged (of foundational contributions in 19th cent. mathematics) within a wider approach, a perspective that – to put it in a nutshell – emphasizes the interaction between foundational work and its wider mathematical practice in all its complexity, including interactions between mathematics and its neighbouring fields. The book project that we have elaborated seems to me very interesting, supplementing as it does the existing literature with new vistas. And I believe that our projects about the collective way in which it will be developed, with cross-reading and discussion in future joint meetings, shall guarantee a high quality of the end product.

In my own contributions to the discussion I have essentially sticked to the original project, partly because I had planned them that way, but also because it coincides very well with my expertise and my previous and present work.

At the beginning of our discussions I presented some of the main theses I am elaborating for a book chapter entitled ‘The Crisis in the Foundations of Mathematics’, to appear in the *Princeton Companion to Mathematics*, edited by Fields medallist W. T. Gowers with the collaboration of J. Barrow-Green. In essence, I presented my broad conception of the so-called foundational debate. Although this is often seen as a discussion in the early 20th century, and more precisely in the 1920s, my view is that the foundational debate was intimately linked with methodological and philosophical perplexities that arose with the emergence of so-called ‘classical’ or modern mathematics. From this point of view, the debate started as early as 1870, and it is in this way that it pertained very properly to the topic under discussion.

Our discussions about this first topic led, among other things, to an analysis of the differences between mathematics as practiced around 1800, and mathematics around 1870. Klaus Volkert prepared a table analysing the differences. Several labels and descriptions were offered for both approaches, among which some of us preferred the following. Mathematics as of 1800 was *figural*, oriented toward the study of seemingly concrete objects such as geometrical configurations and analytical formulas, and to the solution of problems by *construction* (of the relevant kind) upon those. By contrast, in 1870 there was (at least in Germany) a strong tendency to develop a *conceptual* style of mathematics, which downplayed the role of concrete elements, in favour of a rather abstract analysis of concepts and structures, aimed at the solution of problems by logical analysis and derivation. It was my thesis that this strong contrast of styles, and the fight between partisans and contradicters of the new style, was the main background for the foundational debate that eventually led to the famous “crisis” in the 20th century.

A second main topic, which like the first I presented in several sessions, was one particular episode of the previous one. In my reconstruction, logicism (the view that mathematics reduces to logic) was the main line adopted by partisans of conceptual mathematics who employed set theory as the key tool for their work. This means that, historically speaking, logicism is mainly a late-19th century position, which runs against the widespread but historically inaccurate view that it was a crucial position in the 1920s. The German mathematician Dedekind was a key proponent of this viewpoint, and on the basis of new evidence we know that Hilbert was an adherent during the 1890s. As this is a new and somewhat surprising topic, that leads to an interesting reappraisal of the very important contributions of both men, we devoted some time to an exposition of their views. Special attention was given to the work of both mathematicians on the foundations of the number system, to the emergence of structural and axiomatic mathematics from their work, and to the origins in logicism of Hilbert's celebrated thesis that consistency entails mathematical existence.

As always, our discussion helped me present my arguments in a better form, and helped me see more clearly some issues, e.g., connections between the topics discussed and Hilbert's work on the foundations of geometry. Likewise, our discussion of Dedekind's logicism interacted in an interesting way with Javier Legris' presentation of topics in the development of mathematical logic at the time. The crucial problem was discussed of how Dedekind's understanding of logic fits with contemporary ideas about logic as calculus and language.

The third and last main topic that I elaborated was a wider analysis of the emergence of foundational studies in 19th century mathematics. I tried to locate the main factors affecting this process, and laid special emphasis on the analysis of its philosophical underpinnings. I discussed traits of the German tradition that begins with Gauss in 1800 and ends with Hilbert around 1930, a tradition that emphasized the connections between mathematics and human thought in general, but also the objectivity of mathematical ideas, relations, and structures. We considered the educational, institutional, ideological, and philosophical factors influencing its orientation, as well as the elements it inherited from the previous practices of mathematics and mathematical physics.

On the philosophical level, I tried to substantiate my view that this foundational tradition was crucially dependent on the dichotomy of mind and world (but more by way of the epistemological interpretations offered by its proponents, than in terms of the technical details of their work). That was a characteristic assumption of modern epistemology until the early 20th century, often regarded as identical with the philosophical standpoint itself, but it has been called into question by leading philosophers of the 20th century such as Wittgenstein, Heidegger, and the French epistemologists, e.g. Foucault and others (the debates on philosophy of the subject vs. philosophy of concepts fit here). This was the general topic I discussed in my contribution to the *journées d'études* we enjoyed in June 16-17 at the Maison Suger & Columbia University Institute for Scholars at Reid Hall, under the general rubric *Fondements et justification des pratiques en mathématiques*. My title was "Towards an archaeology of the foundations of mathematics".

This very interesting and fruitful stay in Paris has also given opportunity to prolong my previous contacts with several groups acting in the city. The following are the main examples:

On 17 April, I gave a talk for the *Seminaire Histoires de Géométries* (Maison de Sciences de l'Homme), organized by Dominique Flament, on "The magic triangle: mathematics, physics and philosophy in Riemann's geometrical work". Here I dealt with some of the material which constitutes my book of 2000, *Riemanniana Selecta* (Madrid, CSIC, Colección Clásicos del Pensamiento).

On 23 May, I delivered a talk on "The early days of point-set topology, and Poincaré" for the conference *Henri Poincaré 1854—1912. A meeting to celebrate the 150th anniversary* (The Open University and Kent's Hill Conference Centre, Milton Keynes, GB). This conference was jointly organized by the Open Univ. Centre for the History of the Mathematical Sciences, and the Archives Poincaré at Nancy. Part of the material I presented can be found in my book *Labyrinth of Thought: A history of set theory and its role in modern mathematics* (Basel, Birkhäuser, 1999), and in a forthcoming paper.

On the 7th of June, I was invited to give a talk "On the extra-mathematical factors behind Cantor's set theory" by the *Seminaire de l'Équipe REHSEIS*, directed by Karine Chemla. My presentation was based on the paper 'The Motives Behind Cantor's Set Theory: Physical, biological and philosophical questions', presently being published by the journal *Science in Context* (vol. 17, nº 1/2, 2004, 1-35). I have maintained personal contacts with several members of the group like Marco Panza, Nadine de Courtenay, Karine Chemla, Anne-Marie Decaillot, and Olivier Darrigol.

Besides, I have maintained contacts with members of the group *IHPST* directed by Jacques Dubucs, in particular with my colleague Paolo Mancosu (UC Berkeley), who was also living at the Maison Suger, and with Mark van Atten. Likewise, I attented the conference organized by *IHPST*, *Les mathématiques et l'experience (1918-1938): L'application et l'interprétation des mathématiques dans la philosophie de l'empirisme logique de l'entre-deux-guerres*, on 26-28 May at the Collège de France.

Naturally, I have also kept elaborating other work in progress, besides the papers that have already been mentioned. In particular I finished the article "Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904", which is now being published by *La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas* 7, nº 2 (2004), of which I am currently editor of its section on the history of mathematics.

3) Sébastien Gauthier (Institut mathématique de Jussieu– Université Paris 6)

Au cours du XIXe siècle sont apparues des tentatives pour représenter géométriquement des phénomènes arithmétiques. Ce type d'intervention de la géométrie en théorie des nombres constitue un terrain d'observation intéressant du point de vue des fondements car c'est aussi au XIXe siècle que le programme d'arithmétisation, qui signifiait pour certains mathématiciens fonder les mathématiques sur les propriétés des nombres entiers, se développe.

Faisant face à l'arithmétisation, ces recours à la géométrie hors de son domaine demandaient à être justifiés par les mathématiciens s'engageant dans cette voie et les arguments utilisés peuvent être reliés à la conception de la géométrie qu'avaient ces mathématiciens.

Dans le cadre des travaux du groupe de travail, j'ai présenté deux exemples de géométrisation, le premier chez Félix Klein et le deuxième chez Hermann Minkowski.

- *La géométrisation par Klein des « nombres idéaux » de Kummer*

Au milieu du XIXe siècle, Ernst Eduard Kummer s'intéressa au problème de l'existence d'une factorisation unique en éléments irréductibles pour des entiers complexes formés avec des racines de l'unité. Kummer se rendit compte que certains de ces nombres ne vérifient pas cette propriété et donna un contre exemple. Pour remédier à cette difficulté Kummer introduisit ce qu'il appela les « nombres idéaux ». D'autres mathématiciens à la suite de Kummer proposèrent des solutions alternatives pour régler ce problème de factorisation. Ce fut le cas par exemple de Richard Dedekind avec sa théorie des idéaux et de Leopold Kronecker avec la théorie des « diviseurs ».

Ces théories mathématiques sont intéressantes du point de vue du thème de la justification car il s'agit pour ces mathématiciens d'introduire à la fois de nouvelles méthodes mais aussi de nouveaux objets dont le statut et l'existence posaient problème et demandaient donc à être justifiés.

Une journée de travail du groupe a été consacrée à étudier la manière avec laquelle ces différents mathématiciens justifient leur approche ; dans ce cadre j'ai présenté le traitement géométrique des « nombres idéaux » de Kummer proposé en 1893 par Félix Klein.

L'idée de Klein fut de reprendre la représentation géométrique des formes quadratiques binaires par un réseau qui avait été donnée par Carl Friedrich Gauss en 1831 dans son rapport sur la thèse de Ludwig August Seeber. La théorie des formes quadratiques permet alors de dire qu'il n'y a qu'un nombre fini de réseaux de points associés aux classes d'équivalences de ces formes pour un discriminant D fixé. Klein sépara ces réseaux en deux catégories : le réseau principal et les réseaux secondaires et il interpréta les « nombres idéaux » de Kummer comme étant les points des réseaux secondaires. Ainsi dans le système formé des points du réseau principal et ceux des réseaux secondaires la propriété d'existence d'une factorisation unique est vérifiée.

Comment Klein justifiait-il l'introduction de ce point de vue géométrique ? Trois grands types d'arguments peuvent être dégagés chez Klein.

D'abord, il avait tout un discours autour de la difficulté de la théorie des nombres qu'il opposait à la simplicité de sa méthode, cette simplicité étant une conséquence de l'intuition que donne la représentation géométrique de résultats mathématiques abstraits. Son point de vue venant ainsi éclaircir des résultats mathématiques qu'il jugeait difficiles, il lui donnait aussi un rôle pédagogique à jouer.

Un deuxième argument de Klein en faveur de sa méthode était celui de l'unité des domaines des mathématiques. Klein croyait en l'unité des domaines mais considérait que la théorie des nombres était souvent vue comme à part du reste des mathématiques. La méthode géométrique qu'il proposait était donc pour lui un moyen de faire un lien entre l'arithmétique et la géométrie et ainsi de progresser vers l'unité qu'il défendait.

Le dernier grand type d'argument utilisé par Klein pour justifier l'utilisation de sa méthode est celui de la généralité. Pour lui sa démarche était « d'application universelle »,

elle devait pouvoir se généraliser sans difficulté à de nouvelles situations et donc son ambition était de fonder la théorie des nombres sur cette représentation géométrique des formes quadratiques par un réseau.

- *Conception de la géométrie et présentation d'un résultat chez Minkowski*

Lors de la journée d'étude du 17 juin 2004 organisée à Reid Hall, j'ai présenté à travers l'exemple de Hermann Minkowski comment les mathématiciens peuvent utiliser la conception qu'ils ont de leur domaine pour justifier leur pratique mathématique mais aussi dans le cas de Minkowski leur manière de communiquer sur leurs travaux.

Minkowski, dans sa théorie qu'il appela la « géométrie des nombres », utilisait des méthodes géométriques en théorie des nombres et ce choix était justifié à travers la conception qu'il avait de la géométrie.

Minkowski voyait la géométrie comme étant du côté de la nature et son étude était donc pour lui une question d'expérience. De plus, de part ce lien avec le monde sensible, l'intuition de l'espace avait un rôle important à jouer en géométrie. Ainsi un des premiers objectifs de Minkowski à introduire des méthodes géométriques en théorie des nombres était d'essayer de donner une place plus grande à l'intuition et ainsi de réussir à éclairer et à simplifier les résultats de la théorie.

Ensuite, Minkowski, qui lui aussi croyait en une harmonie pré-établie entre les différents domaines des mathématiques, pensait que la géométrisation de la théorie des nombres permettait de rétablir cette harmonie.

Ces idées de simplification et d'unification ont déjà été remarquées avec le travail de Klein. Mais l'ambition géométrique de Minkowski était plus importante car il voulait que la géométrie ait aussi une fonction heuristique. Elle devait intervenir de manière essentielle dans la recherche de nouveaux résultats et c'est en particulier sur ce point que la démarche de Minkowski fut perçue comme originale par certains mathématiciens de l'époque comme par exemple Klein, mais aussi E. Cahen qui fit des commentaires sur le travail de Minkowski dans la version française de *L'Encyclopédie des sciences mathématiques*.

Ces positions prises par Minkowski au sujet de la géométrie fonctionnaient comme justification des méthodes qu'il employait. Il défendait ainsi son choix d'utiliser la géométrie en théorie des nombres. Mais comme va le montrer l'exemple qui suit le point de vue de Minkowski sur la place de la géométrie permet aussi de justifier ses choix de modes d'exposition de ses travaux. En effet, la dimension géométrique dans la géométrie des nombres était pour lui très importante, pourtant selon les objectifs qu'il poursuivait lorsqu'il voulait communiquer sur sa théorie la place accordée à la géométrie n'était pas la même.

Cet aspect dans le travail de Minkowski transparaît en particulier dans la présentation qu'il donnait de son théorème relatif aux réseaux et aux parties convexes symétriques par rapport à l'origine qui pouvait être très différente selon les articles. Par exemple dans son article qui fut présenté en 1893 lors de la conférence de Chicago[9] et où il s'adressait à un public pas uniquement composé de spécialistes, sa présentation était voulue plus pédagogique, mettant en avant le processus de découverte. Il avait donc recours à un vocabulaire exclusivement géométrique (volume, distances radiales…).

Dans deux lettres que Minkowski adresse à Charles Hermite en 1891 et en 1893, la présentation de ce même théorème était complètement différente.[10] Hermite étant un spécialiste des sujets abordés par Minkowski l'objectif de ce dernier était de communiquer sur les résultats et pas sur l'heuristique. Le vocabulaire géométrique est alors remplacé par un vocabulaire purement analytique (intégrale, fonction de plusieurs variables…).

Les choix de Minkowski dans ces articles sont aussi justifiés par la manière dont Minkowski et Hermite envisageaient la répartition entre les domaines des mathématiques. D'un côté Hermite voyait la géométrie séparée du reste des mathématiques, de l'autre Minkowski considérait qu'il y a le domaine du continu avec l'analyse et la géométrie et le domaine du discret avec l'arithmétique. Ces conceptions avaient elles aussi un impact sur la pratique de ces deux mathématiciens. Pour Hermite les objets fondamentaux à étudier étaient de nature analytique (par exemple les formes quadratiques à coefficients réels ou complexes ou bien encore les fonctions elliptiques). Pour Minkowski les objets centraux étaient ceux lui permettant de lier le discret et le continu c'est-à-dire les parties convexes ou de manière équivalente les distances radiales.

Pour terminer, remarquons qu'avec la géométrie des nombres il s'agissait pour Minkowski de donner un fondement aux mathématiques mais pas au sens réductionniste, ce qui était visé par Minkowski c'était l'unité qui passait par le développement des interactions entre les domaines des mathématiques.

---

[9] « Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace », traduction de L. Laugel, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e s., t.15, 1896.

[10] La première lettre est publiée en 1891 dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences,* t.112. La deuxième en 1893 dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, 2e s., t.17.

Ces tentatives de géométrisation de la théorie des nombres fournissent donc des exemples pour voir comment les mathématiciens peuvent justifier leur pratique mathématique. Ce mot pratique comprenant bien sûr le travail de recherche mais aussi la façon dont ils communiquent sur leurs travaux.

Ce sont aussi des exemples de ce que pouvaient entendre les mathématiciens par fondements avant même que la recherche des fondements ne se constitue en un domaine autonome. Le sens du mot fondement et la forme des fondements pouvaient d'ailleurs être très différents selon les auteurs. Pour Minkowski, par exemple, il semble que fondement était très proche d'unité.

4) Catherine Goldstein (CNRS – Institut mathématique de Jussieu)

Le fil directeur de ma participation au groupe de travail est la transformation d'une discipline mathématique particulière, la théorie des nombres, au cours du 19e siècle et au début du 20e siècle: celle-ci passe en effet, pour d'importantes communautés, du statut de discipline marginale à celui de modèle théorique et pratique pour l'ensemble des mathématiques, et paraït intervenir en partie comme étape intermédiaire dans l'élaboration d'une pratique fondationnelle, avant ses rattachements à la logique. La théorie des nombres peut donc servir tout à la fois d'élément de comparaison (par rapport à d'autres modes de fondation) et de domaine pradigmatique à étudier. Dans ce cadre général, mes interventions ont porté plus spécifiquement sur les thèmes suivants.

- *Le programme et le travail de Charles Hermite (1822-1901).*

Hermite n'est en général jamais sollicité dans une réflexion sur les fondements, car il n'a pas écrit de texte intégralement consacré à cette question ou qui l'aborderait dans une perspective théorique; en fait, il apparaït souvent comme hostile à la fois à l'intégration dans les mathématiques des nouveaux phénomènes associés aux efforts fondationnels à la fin du 19e siècle (fonctions sans dérivée, structures algébriques) et aux aspects les plus philosophiques de la réflexion sur les mathématiques (par exemple face à Cantor). Pourtant, il est un des mathématiciens les plus importants de la période et exerce une influence considérable, en France au moins; de plus, à travers sa correspondance, très abondante, et de nombreuses remarques éparpillées dans ses écrits les plus techniques, il manifeste une grande cohérence de vues sur l'exercice des mathématiques, leur architecture et leur nature qui, outre son intérêt propre, permet de recontextualiser certains épisodes classiques de l'histoire des fondements.

Une séance a été consacrée à la reconstitution de son programme, à partir d'un collage systématique de citations dispersées. Ses traits caractéristiques incluent une représentation disciplinaire qui vise à associer arithmétique, algèbre et analyse en un seul champ (alors que géométrie et mécanique, par exemple, n'y sont pas rattachées), une hostilité à la création de nouveaux concepts (appuyée sur une vision chrétienne du monde et du travail scientifique), une insistance sur la fécondité d'une approche plus que sur sa rigueur. L'analyse est chargée par Hermite de fonder à terme l'unité des disciplines mathématiques; la systématicité n'est pas obtenue par une réduction à des axiomes, mais par une unification des terrains mathématiques, elle tire sa représentation d'une interprétation organiciste du développement mathématique.

Une deuxième séance a permis de montrer comment ces différents aspects se coordonnent dans la pratique mathématique d'Hermite et y sont mis en oeuvre (méthodes analytiques en théorie des nombres, prédilection pour les constructions de représentants explicites plutôt que pour le travail sur les classes, multiplication des preuves mettant en évidence les liens possibles entre thèmes, etc.).

Une troisième séance a contextualisé le point de vue d'Hermite par rapport à celui d'autres arithméticiens contemporains (Lucas, Dedekind, etc.), à partir d'une histoire sociale des textes de théorie des nombres publiés entre 1870 et 1914.

- *Arithmétisation*

Ce panorama suggérait de rouvrir le dossier de l'arithmétisation – à travers la lecture collective d'un article de Félix Klein de 1895 qui introduit et définit le terme. Autour de 1900, cette arithmétisation constituait une proposition importante de fondements des mathématiques, à savoir la réduction de toute assertion à un théorème sur les entiers naturels. Pourtant, l'utilisation d'outils analytiques (ou géométriques) en théorie des nombres avait aussi été interprétée par certains mathématiciens (comme Hermite par exemple) de manière inverse, c'est-à-dire comme l'annonce d'une intégration de la théorie des nombres au sein d'un domaine numérique plus vaste, et non comme sa légitimation comme base unique des mathématiques. La mise en évidence de ces tensions nous a permis de thématiser dans le contexte de la pratique mathématique du 19^{e} siècle certains aspects de l'activité fondationnelle, en particulier le programme d'arithmétisation et l'alternative dessinée par

Klein : certaines oppositions classiques (intuition/rigueur, continu/discret, fondation/unification) sont en effet déplacées ou associées au cours de ces débats.

- *Journée sur les idéaux, en collaboration avec Jacqueline Boniface et Sébastien Gauthier*

Les nombres idéaux, introduits au milieu du 19e siècle par Kummer pour regagner pour certains nombres algébriques les lois de l'arithmétique ordinaire, puis leurs généralisations variées (en particulier le concept ensembliste d'idéal proposé par Dedekind) constituent un élément important dans la réflexion sur les fondements: quelle justification les mathématiciens donnent-ils à l'introduction de ces nouveaux objets et quel statut leur octroient-ils ? Nous avons donc repris les textes de ces auteurs (Kummer, Dedekind, Kronecker, Klein, Châtelet) en prêtant une attention particulière aux arguments qu'ils déployaient lors de la mise en place de ces objets, afin de déterminer lesquels de ces arguments sont repris lors de l'officialisation de l'étude des fondements.

- *Justification des pratiques et fondements*

Lors du colloque des 16 et 17 juin, j'ai présenté deux cas, l'un au 17e siècle (Bernard Frenicle de Bessy), l'autre au 19e (Charles Hermite) qui partagent plusieurs points communs: bien que les deux auteurs soient des acteurs importants sur la scène mathématique de leur temps, ils ne sont pas insérés dans l'histoire traditionnelle des fondements qui relie d'ordinaire leurs interlocuteurs directs (Descartes et le problème de la mathesis universalis dans le premier cas, Kronecker, Dedekind, Weierstrass dans le deuxième); de plus, tous deux ont perçu de manière cruciale les mathématiques comme une science de la nature, à des moments où les fondements de ces dernières, tout autant que les fondements des mathématiques, étaient largement en question. Prendre ces aspects en compte dans l'analyse des justifications que ces mathématiciens donnent chacun de leurs pratiques respectives montre quelle sélection le travail officiel des fondements a opérée dans les multiples réflexions sur les pratiques mathématiques. Les pratiques de fondements des mathématiques peuvent être ainsi mises en parallèle avec celles d'autres fondements disciplinaires contemporains, dont elles s'inspirent parfois, ou dont au contraire l'éloignement, signant l'autonomie des mathématiques, a pu constituer une clé d'explication importante.

5) Javier Legris (Université de Buenos Aires)

My work in the research project was focused basically on two main points: first, the relations between symbolic logic and foundations of mathematics in the second half of 19th century and, second, the uses of logic in the justification of mathematical practice in the same period. I would like to stress that, as a consequence of the continuous interchange and fruitful discussions with the other members of the group, I was able to obtain a better image of the whole mathematical context from which symbolic knowledge emerged.

In the second half of 19th century symbolic logic received a decisive impulse, as mathematicians began to be interested in it and developed systems for deductive reasoning based on mathematical ideas. Very well known examples of this are the algebra of logic due to Boole and the conceptual script of Frege. Now, it is generally accepted that the foundational discussion at that time was also closely related with logical issues. It is not only the fact that characteristic logical notions appeared in the discussion about foundations, like the search for rigor and perspicuity in proofs, but also that different kinds of “logicism” were proposed. The common idea consisted in founding mathematics on notions that were considered logical at that time, and among these notions there were considerations about essential logical concepts such as predicates or quantification.

In the origins of symbolic logic we face some problems occurring in the foundations of mathematics, namely the opposition between the idea of a *reductive* theory and a *general* theory and the opposition between *computational* and *conceptual* trends in the development of modern mathematics. During the development of the research project, I discussed these aspects in authors like Boole, Frege, Robert Graßmann and Ernst Schröder.

Having this background in mind, I sketch briefly the problems I devoted to and I brought into discussion.

- *The distinction between calculus and language in the history of symbolic logic*

In order to motivate the discussion, I introduced in my exposition the distinction between *logic as language* and *logic as calculus* due originally to Jean van Heijenoort. Thus, two traditions emerge, represented mainly by the conceptual script of Gottlob Frege and the algebra of logic, respectively. This distinction lies in the background of the famous collection *From Frege to Gödel*, edited in 1967 by van Heijenoort, which was also very influential in the understanding of the development of the foundations of mathematics from the end of 19th century on. It should be noticed that in the opposition calculus vs. language (as least according to van Heijenoort’s original ideas) a broader problem is taken into account: the problem of the role played by the symbolic language in logic. In the algebraic tradition, the symbolism is introduced *as a formal representation in order to solve problems*. On the contrary, for Frege the symbolism served as a normalization or regimentation of natural language, and has first a *descriptive* function (the description of the deepest structure of thought), that takes shape in the analysis of judgements. New concepts are introduced through definition by analysis.

I discussed the historical accuracy of van Heijenoort´s distinction. There is the fact – as it was acknowledged by van Heijenoort himself – that the two traditions coexisted and permeated the future development of modern logic. From the historical point of view neither Leibniz nor Frege considered both aspects separately, they should concur in a logical system and it was the case of Frege's *Begriffsschrift*. In response to Schröder's criticism, he wrote that his conceptual notation was not only a *calculus ratiocinator* but also (that is, *and*) a *lingua characterica*. He considered calculus as a "necessary component" of a conceptual notation.

In my opinion, van Heijenoort´s real.aim was to explain the historical fact that in spite of the initial universalism in the origins of mathematical logic (Frege, Peano and Russell) some "relativistics" ideas were introduced already in Hilbert's programme and –above all- in Löwenheim's work. This ideas enable the development of formalized systems and *both* model theory and proof theory for such systems. Or, to say it more crudely, Van Heijenoort needed to justify some aspects in the origins of mathematical logic, which could be inferred from his collection *From Frege to Gödel* but not were accurately represented in it. In this sense, he was looking at the development of modern logic from a restricted point of view (and because of that his approach could be called "whigish").

I argued finally that *two kinds* of scientific universal language should be distinguished: first, the idea of an unique universal language, whose expressions are supposed to have a fixed meaning, and, second, the idea of a general language without a fixed meaning, that can be applied into different domains (universality of applications). Thus, the two notions of universality and generality come to the forefront.

The distinction between these two notions can be very fruitful in the proper understanding of what foundations of mathematics are. It can be compared with the distinction between *figural* and *conceptual* mathematics sketched in the meetings of the project by other members of the research group

- *The tradition of symbolic knowledge in the history of symbolic logic and of the foundations of mathematics*

Calculus and formal languages are notions that have both epistemological aspects, in so far, they are also tools for the achievement of knowledge. In this context I introduced the notion of *symbolic knowledge*, which stems from Leibniz. Hence, a *pragmatic* perspective to analyze this distinction will be introduced and discussed. I will argue that 19th Century algebra of logic belongs to the *methodological "tradition of symbolic knowledge"*, as I call it, whereas in other logicians like Frege, even if we can find some traces of this idea, another use of symbolism and calculus is made.

The notion of symbolic knowledge can play an important role in the context of the justification of mathematical practice. For in many occasions mathematical theories have been justified as being cases of an abstract symbolical calculus. This is the cases of the symbolic algebra in England. If we accept this characterization of symbolic knowledge, it can be held that most of the founders of the algebra of logic in the 19th Century (George Boole in first place, but also Ernst Schröder later) made an *implicit* use of the idea of symbolic knowledge in their conception of logic and formalization. This methodology of symbolic knowledge was taken from algebraic research in mathematics at the beginning of 19th Century.

This point of view relies on the idea of 'abstract logic', that is, of abstract calculi, whose symbols are understood in a purely formal sense, without fixing an object domain beforehand. These operations and relations are characterized by rules in order to transform compounded symbols into others. These calculi can be applied afterwards to specific domains, so that they can be used as tools for the representation of concrete structures in different domains and the derivation of results about them. Ultimately, these results can be regarded as the product of mere symbolic manipulation. Moreover, in the period under consideration calculi are regarded as technological devices (a "symbolic technology") in order to achieve knowledge.

- *Justification as epistemological notion*:

In the discussions about the notion of justification of mathematical practice I presented the classical philosophical idea of *epistemic* justification in order to oppose it to other non epistemic notions of justification – related to actions –underlying the thesis of other members of the project. A classical definition considers knowledge as "justified true belief" (see Plato's Theaetetus, 201 c), where justified belief is understood as belief "meta logou" (grounded belief or "accompanied by a rational account of itself or ground" (Burnet)). Justification comes a mediator between the *subjective* belief and the *objective* truth.

Some different notions appear in this context, such as evidence, and rationality. Nevertheless, a belief is justified, if it is obtained by means that are taken for granted or are considered as reliable by the correspondent *epistemic community*. This means consist of criteria or standards for the grounding of a proposition, that are accepted for the concerned people. So, they are *intersubjective standards* for obtaining a belief. Intersubjective standards are *situation-dependent*. Someone has a justified belief of a proposition, if he/she is convinced of the truth of the proposition and he/she has obtained it by currently accepted intersubjective standards. This idea of intersubjective standards does not presupposes the existence of basic convictions in the form of postulates or axioms, but of criteria for obtaining beliefs. Which criteria are considered valid for an epistemic community is a question that goes beyond the notion of justification itself. It can be only established by empirical investigations (sociological, historical, anthropological, etc.). Thus, pragmatic elements are included in the epistemic notion of justification.

- *Ernst Schröder´s algebra of relatives and its application to set-theoretical foundations of mathematics*

As a result of the interactions with the problems and subjects researched by other members of the group, I concentrated myself to the analysis of Schröder´s applications of his theory of relatives to the set-theoretical foundations of mathematics, namely Dedekind’s chain theory and Cantor´s theory of set equivalence. Schröder conceived the algebra of relatives firstly as a *general abstract theory*, which shows the more basic mathematical structure underlying logical inference. But, secondly, it can be applied to other domains, in order to obtain a better representation of them. This would be for him the case of set theory. I regarded this application as useful to discuss the interplay between symbolic logic and. foundations of mathematics at the end of 19th century. Here can be found the combination of a computational and a more conceptual approach to logic already mentioned. At the same time the theory of relatives is intended as a general theory for founding set theory.

Moreover, I stressed the importance of this interpretation for the spreading of Schröder’s ideas in the mathematical community and, specially, in the founders of the model-theoretic tradition in logic, Leopold Löwenheim and Alfred Tarski.

I argued that the real aim of Schröder’s interpretation of set-theoretical results was to *represent* and *elucidate* set-theoretical notions trough the algebra of relatives, that was conceived als as an universal language. So, the algebra of relative should be what Schröder called of pasigraphy, whose aim is to express all scientific concepts through a minimal set of basic concepts, that can be generally applied.

These considerations about Schröder´s algebra of relatives were the main subject of my paper "Symbolic Logic and Foundations of Mathematics in the 19th Century: The Case of Ernst Schröder´s Algebra of Logic" delivered at the *Journées d´études. Fondements et justification des pratiques en mathématiques*. As an outcome of my research inside the project, I will write my contribution to the planned volume on Schröder´s treatment of fundational problems, comparing Schröder´s achievements with Frege´s logicist ideas on foundations.

During my stay in Paris, I could also assist to meetings at the seminar on geometry organized by Dominique Flament at the Maison des Sciences de l´homme, the Seminar d'histoire des mathématiques at the Institut Henri Poincaré, *Séance "Points de vue sur l'histoire de la geometrie projective"*, and the colloquium "*Les mathématiques et l´expérience"* held at the Collège de France, 26-28 May 2004, among others.

6) Klaus Volkert (Université de Cologne)

„Justifying" in connection with mathematics can be understood in different ways. Firstly mathematics as a whole has to be justified in its existence to people and institutions paying for it. This is a sociological perspective not considered by me. Second there is justification in mathematics itself in the sense of "proving things" – that is a more technical point. But it should be noticed that the notion of proof itself underwent important changes in the history of mathematics, so historical work on that aspect is possible (but not done by me for the moment). I focussed my investigations on a third aspect of "justifying": that is justifying of new methods and/or new objects – in particular on those ones whose introduction was in contradiction with commonly (often tacitly) accepted standards. For me this is part of "historical epistemology" (R. Daston): that is the project to describe and to analyse the development of the conceptual and methodological framework of mathematics. In this way I hope in particular to come up with a description of the changes in the mathematical practise of the 19th century. This is also related to elder work by mine on the changing role of intuition in mathematics on one hand and to investigations on national styles and traditions on the other hand. The question of justifying should also be regarded in respect to the rhetoric in mathematics; e.g. what types of values are cited in discourses of justification? This is a rather new research program to which not much contributions were made until the present.

There are strong connections to the notorious question of the “foundations of mathematics” in as far that “justification” may mean “establishing solid grounds”. I am not much concerned with this because I want to look to mathematical practice in which the “last” foundations are often not so important. Otherwise said: The justifications which I consider are more of a local nature and not an a global one.

I have studied two cases more deeply:

- the introduction and the use of monster-functions in analysis
- the introduction of four- and higher-dimensional spaces in geometry/topology.

Ad 1. The introduction of monster-functions in the course of the 19th century can be seen on the background of the changing attitudes to monsters in the realm of natural history and sciences. In my conference at Maison Suger I argued for the thesis that in both cases the same stages can be identified: First a complete rejection or ignorance, than a certain curiosity in strange things – sometimes even amusing – and in the end the integration under general rules.

There were many important discussions related to the theme of the pathological and the normal in the context of 19th century anatomy and pathology described in Canguilhem’s classic of the same title: Is there a continuity given between the state of health and that of sickness; if so, it is reasonable to expect new insights in the working of the healthy body by analysing its disfunctions in states of sickness. Otherwise taken this means the integration cases into natural order – a process quite parallel to that of their naturalization.

Exactly this took place also in the development of analysis in the 19th century. Before 1800 we do not find here an interest in bizarre entities (likewise in geometry one liked to argue with the general or generic case – excluding in this way exceptional situations from being studied). If they showed up more or less by chance (e.g. Euler’s example $f(x) = x^x$) they were considered as strange things not saying much on general principles – just bizarre and therefore amusing toys. Generality in that period was achieved by considering typical or paradigmatic cases; there was no reflection on “all cases”. This type of generality is deeply related to the way in which the paradigmatic entities were given – this type of thinking can be characterized as “intensional” (in the sense of the “intensio” in classical logic). A typical example of that type of thinking can be found in Euler’s classification of real functions in the first volume of his famous “Introductio”. This way of thinking is that of the historian of nature who is interested in the typical outfit (let’s say) of a plant or an animal – exceptions are always possible but do not disturb the general idea ("All sheeps are white" is not falsified by the discovery of some [few!] black individuals).

This line of thought is present in Abel's criticism (1829) of Cauchy's theorem (stating that the sum of a pointwise converging series of continuous functions is continuous itself) where he speaks of "exceptions from which the theorem is suffering" – even noting that there are "known many exceptions of this type"! It should be noticed that Abel's exception was not new – it was known to Euler for example. It was not constructed for a definite issue but found and studied more closely. May be this is true also of the famous example ($f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$) given by Cauchy in the Introduction to his "Cours d'analyse" (1821) – a context impotant by its rhetorical function.

The first real monster – a function with a completely unknown behavior explicitly construction for that reason - was given by Dirichlet (1829): It is the function taking the value c for all rational points and d (not equal to c) on all others. This function – whose graph can not be given by a normal curve – has infinitely many singularities which form a dense subset of the real numbers; it is bounded but in no point continuous and therefor it is not integrable in Dirichlet's sense. The revolutionary technique used here perhaps for the first time by Dirichlet is the following: We prove a theorem under a certain hypothesis (e.g. for integrable functions) and show that this hypothesis is necessary because the theorem is no more valid in the case of a function not fulfilling that specific hypothesis. Dirichlet does not comment on his example; a treatise on the foundations of analysis announced by him was never written. But his ideas were taken up by his pupil Riemann, who made use of the new method in his essay on trigonometric series (1854 – published 1868) written on the occasion of his habilitation. Riemann gave here a function which is non-continuous in a dense subset of the reals but which is nethertheless integrable. He defended his investigation by noticing that this type of functions never studied before "can serve to illuminate the foundations of analysis" and "that are now applied in other part of mathematics" (namely number-theory). The technique implicit in Riemann's example was later on turned into a method by his pupil Hankel (1870) called "the principle of the condensation of singularities" being itself the starting point of important investigations by Cantor (who was interested in characterizing the sets of singularities so arriving at his set-theory) and Dini, who wrote the first textbook on modern analysis (1879).

An even more famous monster was constructed 1872 by Weierstrass who gave the first example of a continuous nowhere diffentiable function. It was published by Du Bois-Reymond in 1875, who related it to the "deep questions of the metaphysics of analysis" and even to "the borders of the human mind". Du Bois-Reymond wrote a whole book (1882), "Die allgemeine Functionenlehre. Erster Theil: Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Größe, Grenze, Argument und Function" on these questions – the "anorthoidische" functions being the testing case for a empiristic and a idealistic philosophy of mathematics. Du Bois' book rests within the classical stream of investigations on fundamental questions; this is mirrored by its subtitle taking up once again the classical topos of "metaphysics" (cf. for example Carnat's classical on the metaphysics of infinite small quantities [1797]). Since metaphysics is a subdiscipline of philosophy the cited title indicates that the problems of foundations were considered as philosophical questions. The idea, that mathematics may establish its foundations by its own efforts and methods is a rather new one – coming up in the second half of the 19th century. This change in attitude got its linguistic expression by the fact, that the term "metaphysics" disappeared from the discourse to be replaced by "foundations". One of the first to use this term in a characteristic way was Frege with his "Foundations of arithmetic" (1883).

In the 1870th the new method in analysis was applied by many mathematicians; with Darboux (1875) it came also to France which was until that point dominated by the old tradition of the Ecole polytechnique not leaving much place to foundational questions. Research should be made on the way in which the new method was presented by the authors in particular with which type of arguments it was justified. The described new way of thinking in mathematics can also be linked to some developments in modern logic and philosophy in particular to the discussions on the idea that concepts should be identified with their extensions.

In 1844 Cauchy critized the instensional thinking on the occasion of his discussion of Euler's notion of continuity. For that reason he constructed three expressions all giving the "same" function – the absolute value – but differing in their character of continuity in the Eulerian sense (two being continuous the other not).

A final step in the history of the monster-functions was taken by Boltzmann, who applied them to physics. In his paper "On the so-called H-curve" he described the Brownian motion with the help of a curve having any tangent in any of its points. Boltzmann argued that this behaviour was not as strange as it may seem on the first glance because it is shown by many instruments like a barograph (up to a certain approximation should be added). Boltzmann even said that he feared the sarcasm of the "geometers of the discipline". Boltzmann's innovation can be seen in the greater context of the 19th century discussions on not-intuitive entities in physics like atoms, fields and so one.

One problem in this research is, that there are so many texts – sources and also comments - which should/could be taken into account. That's the case because the problem of the monsters is directly related to the foundational changes in general that analysis saw in the second half of the 19th century – often described as the installation of rigour. In contrast to that studies on rhetorical questions posed by mathematics are rather rare.

Ad 2. The second theme on which I worked during my stay at Paris was the introduction of four-dimensional (and higher-dimensional) spaces in geometry. At our colloquium I gave a conference on that. In principle the problems are here the same as with the monster-functions that is to establish mathematical entities which were considered to be in contradiction to intuition. Until the 19th century four-dimensional space was declared to be impossible or against nature (cf. Cardano in his "Ars magna" [1544] for example). In 1827 even Möbius in his "Barycentrischer Calcul" rejected the possibility of a four-dimensional space in connection with his discussion on enanthiomorphs. He saw clearly that this riddle would be solved if there were a fourth dimension in space; than the enanthiomorphs in a suitable position could be made to coincide by turning around a suitable plane. The problem of enanthiomorphs was discussed before by Kant in his "Critique of pure reason" and it rested a challenge more or less for the whole 19th century – having also some relations to chemistry and physics. Even Grassmann refused to accept a fourth dimension in geometry – saying in the first edition of his book (1844), that working with higher dimension is only possible in abstract science (like his Ausdehnungslehre) but not in geometry, because the latter can not be reduced to concepts only. Here we meet a tendency - important in the philosophy of mathematics in the 19th century - which can be characterized as empiristic or naturalisitc. Seen as such, geometry is a natural sciences and not part of pure (that is conceptual) mathematics – a locus classico for this position being the preface of Pasch to his secular "Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882). It was an important aspect of the history of geometry and its philosophy in the 19th century to overcome this position.

A second period in the history of four-dimensional space began around 1845. Some authors like Cauchy and Cayley began to use a geometrical vocabulary to illustrate analytic entities; e.g. the quadrupel (x,y,z,t) was interpretated as the four coordinates of a point of four space. But to emphasize their retention to these strange things – may be also to make some concessions to the distaste of the scientific community – they used terms like "analytic point" (quasi-point would be also possible); Cayley emphasized that he made no claim at all at a metaphysical status of four-space. Sylvester in a talk given to the British Association for the Advancement of Science characterized this position as "algebra in disguise" (1869), a position which was for him and at that time obsolete. He argued in favour of a realistic understanding of four-dimensional geometry with the following arguments:

There are many other entities in mathematics that are as dubious as four space, e.g. "notion of infinity in algebra, or of impossible lines, or lines making a zero angle in geometry";

The utility of dealing with four-dimensional geometry is as great as that of infinity etc.

There were great mathematicians who accepted four-space; Sylvester names Gauss, Cayley, Riemann, Schläfli, Salmon, Clifford, Kronecker (not in all these cases it is clear on what basis Sylvester made his claim). Concerning these authorities he concluded: "I strive to bring my faculties of mental vision into accordance with them."

The success of four-dimensional geometry wasn't due to one isolated event (or person); it should be better analysed as a phenomenon of "condensation", that is as the resulting effect of different contributions. (There are parallels here to that in the history of science e.g. the acceptance of atoms; cf. works of Rheinberger and Hacking.) It is a form of a net – each part in connection with the others and stabilizing one another – which is here at work. This is an aspect which should undergo further historical research in my opinion.

One of the first examples for a full acceptance of higher-dimensional geometry was the habilitation talk given by Riemann at Göttingen in 1854 (but published only in 1868); another interesting source for that is the work by Schläfli on the "multiple connection". Clifford (1866) found an interesting application of the new geometry to a problem of (geometrical) probability theory - thus making clear that this was more than an abstraction to its own sake. In 1875 Jordan wrote the first systematic text concerning the new geometry explaining that in this way the fusion between geometry and algebra once inaugurated by Descartes came to its end. Jordan wrote a long article; the first real textbook in France was by written by Jouffret and published in 1903. The French mathematical community was seemingly hostile to the new ideas. Even in 1895 Poincaré felt the necessity to defend "hyper-geometry" in stating that its objects are able of precise definitions and that they can be studied and understood – in contrast not being representable to human beings. But the most striking point in Poincaré's argumentation is his new definition of geometry: It is no longer the study of spatial objects that fall into our senses but it is the study of group (or – more precisely – the study of the action of a group on a space); being so nothing can prevent the mathematician from using others groups and other spaces!

Annexe n°2 : Programme des journées d'études « Fondements et justification des pratiques mathématiques »

16 juin 2004

Maison Suger
16-18, rue Suger – Paris 6e

10h-10h 30	Ouverture et introduction
10h 30-11h 15	**Matthew L. Jones** (Université de Columbia) *Evidence, Mathematical Simplicity and Proof: some Notes of Leibniz on Descartes*
11h 30-12h 15	**Catherine Goldstein** (CNRS - Institut de mathématique de Jussieu) *Que fonder ? Que justifier ? Quelques (contre)-exemples*
12h 15-13h	**Javier Legris** (Université de Buenos Aires) *Symbolic Logic and Foundations of Mathematics in the 19th Century. The case of Ernst Schröder's Algebra of Logic*
15h-15h 45	**José Ferreiros** (Université de Séville) *Towards an Archaeology of Foundations of Mathematics*
15h 45-16h 30	**Jacqueline Boniface** (Université de Nice – CRHI) *La Justification axiomatique chez Hilbert*
16h 45-17h 30	**Jean-Jacques Szczeciniarz** (Université de Bordeaux III– Rehseis) *Réflexions sur Helmholtz*
18h-19h	**Klaus Volkert** (Université de Cologne – Archives Poincaré) *Essai de tératologie mathématique*

17 juin 2004

Reid Hall
4, rue de Chevreuse – Paris 6e

9h 45-10h	Ouverture
10h-10h 45	**Marie José Durand-Richard** (Université de Paris 8) *L'Influence de Locke : de Peacock à De Morgan*
11h-11h 45	**Dominique Flament** (CNRS – Archives Poincaré) *L'Algèbre comme Science chez W. R. Hamilton : le recours au Temps Pur*
11h 45-12h 30	**Sébastien Gauthier** (Institut de mathématique de Jussieu) *Conception de la géométrie et présentation d'un résultat : un exemple d'interaction dans la géométrie des nombres*
14h 30-15h 15	**Klaus Volkert** (Université de Cologne – Archives Poincaré) *À la Recherche de la quatrième dimension*
15h 15-16h	**Jean-Pierre Friedelmeyer** (Université de Strasbourg) *L'Analyse algébrique : l'avenir d'une illusion*
16h 15-17h	**Philippe Nabonnand** (Université de Nancy 2 – Archives Poincaré) *L'Argument de la généralité chez Poncelet, Chasles et von Staudt*

Annexe n°3 : liste des conférences données par les membres du groupe de travail durant la période d'accueil

- Jacqueline Boniface

1. *L'indifférence de l'ontologie*, Nice, 17 mai 2004, Journée d'étude « Quine et la logique ».
2. *La Justification axiomatique chez Hilbert*, Paris, 16 juin 2004, Colloque « Fondements et Justification des mathématiques ».

- José Ferreiros

1. *The Magic Triangle : mathematics, physics and philosophy in Riemann's geometrical work*, Paris, 17 avril 2004, Séminaire « Histoires de Géométries » – MSH.
2. *The early days of point-set topology and Poincaré,* Milton Keynes (Grande Bretagne), 23 mai 2004, Colloque « Henri Poincaré 1854-1912 : A meeting to celebrate the 150th anniversary of the birth of Henri Poincaré ».
3. *The magic triangle : Mathematics, Physics and Philosophy in Riemann's geometrical work*, 14 juin 2004, Séminaire « Histoires de Géométries » – MSH.
4. *Towards an Archeology of Foundations of Mathematics*, Paris, 3 mai 2004, Colloque « Fondements et Justification des mathématiques ».

- Dominique Flament

1. *L'algèbre comme Science chez W.R. Hamilton : le recours au temps pur*, Paris, 17 juin 2004, Colloque « Fondements et Justification des mathématiques ».

- Sébastien Gauthier

1. *Conception de la géométrie et présentation d'un résultat : un exemple d'interaction dans la géométrie des nombres*, Paris, 16 juin 2004, Colloque « Fondements et Justification des mathématiques ».

- Catherine Goldstein

1. *Que fonder ? Que justifier ? Quelques (contre-) exemples*, Paris, 16 juin 2004, Colloque « Fondements et Justification des mathématiques ».

- Javier Legris

1. *Symbolic Logic and Foundations of Mathematics in the 19th Century : The Case of Ernst Schröder's Algebra of Logic*, Paris, 16 juin 2004, Colloque « Fondements et Justification des mathématiques ».

- Philippe Nabonnand

1. *Autour de l'histoire de la géométrie projective au 19^e^ siècle*, Paris, 28 avril 2004, Séminaire d'histoire des mathématiques de l'IHP.
2. *Le répertoire bibliographique mathématique*, Paris, 10 mai 2004, Groupe de travail « Maths et guerre ».
3. *The Lie-Poincaré relationship*, Milton Keynes (Grande Bretagne), 22 mai 2004, Colloque « Henri Poincaré 1854-1912 : A meeting to celebrate the 150th anniversary of the birth of Henri Poincaré ».
4. *La création à Nancy du certificat de mathématiques générales*, Paris, 26 mai 2004, Séminaire d'histoire de l'enseignement – INRP.
5. *La Geometrie der Lage de von Staudt*, Paris, 14 juin 2004, Séminaire « Histoires de Géométries » – MSH.
6. *L'Argument de la généralité chez Poncelet, Chasles et von Staudt*, Paris, 17 juin 2004, Colloque « Fondements et Justification des mathématiques ».

- Klaus Volkert

1. *Poincaré's route to the Poincaré conjecture*, Milton Keynes (Grande Bretagne), 23 mai 2004, Colloque « Henri Poincaré 1854-1912 : A meeting to celebrate the 150th anniversary of the birth of Henri Poincaré ».
2. *Henri Poincaré und seine Vermutung*, Münster (Allemagne), 2 juin 2004, Gauss Vorlesung der DMV in Münster.
3. *L'analyse mathématique en Allemagne dans la seconde moitié du XIXe siècle*, Paris, 12 juin 2004, Séminaire d'histoire des mathématiques de l'IHP.
4. *Essai de tératologie mathématique*, Paris, 16 juin 2004, Colloque « Fondements et Justification des mathématiques ».
5. *A la recherche de la quatrième dimension*, Paris, 17 juin 2004, Colloque « Fondements et Justification des mathématiques ».

Annexe n°4 : Le projet déposé en 2003

INTERNATIONAL PROGRAMME FOR ADVANCED STUDIES, MSH PARIS
COLUMBIA UNIVERSITY INSTITUTE FOR SCHOLARS AT REID HALL

2004 Research Project

THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS IN THE XIXth CENTURY BETWEEN HISTORY, PHILOSOPHY, EPISTEMOGY AND COGNITION

By
Dominique Flament (F2DS – Maison des Sciences de l'Homme)
&
Philippe Nabonnand (Archives Poincaré-UMR CNRS 7117 - University of Nancy 2)

The aim of this Research Project is to advance contemporary works about Foundations of Mathematics, and to contribute to the emergence of new collaborations between historians of mathematics, philosophers of mathematics and mathematicians.

Participants

1) **Core group:**

Jose Ferreiros : Professor of Philosophy at the University of Sevilla (Spain), author of *Labyrinth of Thoughts* (1998) (History of Set Theory, History and Philosophy of Logic)

Dominique Flament (scientific coordinator): CNRS researcher (MSH-Paris), director of the F2DS research team, author of *Le nombre, une hydre à n visges, entre nombres complexes et vecteurs* (1997), editor (in collaboration with L. Boi & J.M. Salanskis) of *1830-1930 : A Century of Geometry, Epistemology, History and Mathematics* (1992), translation of the *Ausdehnungslehre* by Grassmann (1994), (Symplectic Geometry, History of 19th century and 20th century Geometry, Grassmann)

Javier Legris : Professor of Logic at the University of Buenos Aires y Conicet (Argentina), (Logic, History and Philosophy of Logic, Frege)

Philippe Nabonnand (scientific coordinator): Associate Professor of Mathematics at the University of Nancy 2, researcher at the *Archives Poincaré* (UMR 7117, CNRS), editor of *La correspondance entre Henri Poincaré et Gesta Mittag-Leffler* (1999), (Riemannian Geometry, History of 19th century Mathematics, Poincaré, History of 19th century Mathematical Education in French universities)

Klaus Volkert : Professor of Didactics of Mathematics at the University of Frankfurt (Germany), author of *Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850* (1985), *Geschichte der Analysis* (1987), *Mathematik auf den Versammlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und erzte 1843 - 1890* (co-author : R. Tobies) (1997), *Das Homeomorphieproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten in der Topologie 1892 - 1935* (2002), (Algebraic Topology, History of 19th century and 20th century Topology, Geometry and Analysis, History of Mathematical Education in Germany)

2) **Other participants**

Jacqueline Boniface : Professor (recipient of Agregation) of Mathematics at the University of Toulouse (France), editor (in collaboration with N. Schappacher) of L. Kronecker's last series of lectures (1891), (Arithmetics, History of 19th century Arithmetics)

Catherine Goldstein : Researcher (CNRS,Paris-Orsay), author of *Histoire du theoreme de Fermat (~1995)*, editor (in collaboration with J. Gray and J. Ritter) of *L'Europe mathematique* (2000), (Algebraic and Arithmetical Geometry, History of Arithmetics, History of the diffusion of Mathematics)

Jean-Jacques Szczeciniarz : Professor of Philosophy at the University of Bordeaux 3 (France), author of *Copernic et la revolution copernicienne* (1998), (Philosophy of Science, Complex Geometry, Philosophy of Mathematics)

THE PROJECT

For most of the 20th century, philosophers of mathematics have tended to narrow their subject to the question of formal foundations. Moreover, they approached it from an ahistorical, systematic perspective. Until recently, historians of mathematics also neglected issues relative to mathematical knowledge and mathematical practice.

To this end, we believe there is a pressing need to reassess the view hitherto propagated by philosophers, historians and mathematicians of a "mathematics' glorious march towards axiomatic formalism in the 19th century".

The phrase "crisis in the foundations of mathematics" usually refers to the problems which the paradoxes of naive set theory gave rise to at the end of the 19th century and the beginning of the 20th century According to the conventional historiography of mathematics, the conjunction of progress in logics and the arithmetization of analysis, together with considerations pertaining to the emergence of Non-Euclidean geometries and to the axiomatics of geometry, confered to early 20th century thinking about the foundations of mathematics distinctive theoretical and historical frameworks. Indeed, the notion of foundations is presented as intimately related to the problems that resulted from the use of actual infinity, to the connection between logic and set theory, and, generally speaking, to the status of mathematical formalism. This crisis led, firstly, to the formalization of axiomatics by Zermelo-Fraenkel which, whether we like it or not, remains the formal foundation of most mathematicians' practice, and, secondly, to the birth of a new field of research: mathematical logic (we include under this generic phrase works related to logicism, to intuitionism, as well as the work in demonstration theory that resulted from formalism).

Most historical or/and systematical thinking about the foundations of mathematics adopt a purely formal standpoint. On the basis of this premise, many works on the history of the foundations of mathematics seem to assume that mathematicians only began developing an interest in the foundations of their field with the advent of the paradoxes of naive set theory. Debates about the legitimacy or merely relevance of new *fields of method* are not featured as aspects of the reflection about the foundations. The cognitive aspects of mathematical theories are thereby often excluded from both mathematical and philosophical works on the foundations.

Moreover, historical studies that deal with the issue of the foundations of mathematics usually only discuss 19th century mathematics from the perspective of the emergence of a demand for rigor (Gauss, Cauchy), of the arithmetization of mathematics (Weierstrass, Dedekind, Kronecker), of the search for the fondations of geometry (with the advent of the projective and non-euclidian approaches), thus elaborating a purely internal and teleological history the axiomatisations of which, *i.e.* formal logic and the theory of formal systems, would be "natural" outcomes. This view was notably propounded by Beltrami in *L'évolution de la logique* (1926) and later adopted by Nagel (*The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry* -1939). Both works, which are very well-researched and soundly argued, implicitely pursue two main rhetorical objectives:

- to show that the strictly formal approach was the product of 19thc mathematical problems and innovations and that, as such, it offered superior insight and rigor.
- to show that mathematical logic "[owed] nothing to the speculations of professional philosophers, nor to logicians" (Nagel) but was grounded in the internal development of mathematics.

Yet the historical study of 19th century mathematics provides numerous instances of mathematical practices which did not proceed from this development in any simple way. Notably, issues pertaining to questions of justification and foundations, which were not yet clearly distinguished, had more to do with an attempt to formulate the way mathematics was done than with laying down the foundations of a body of knowledge already in existence. Moreover, this thinking had been heavily influenced by philosophical and/or philological considerations. Thus the development of mathematical physics and applied mathematics, the emergence of Non-Euclidean geometries and the arithmetization of analysis usually gave rise to questions pertaining to the justification this work called for.

The history of projective geometry in the 19th century is particularly illuminating in this respect: for instance, Poncelet and Chasles found it necessary to legitimise their synthetic approach at great length, both from a historical and from a methodological point of view. Poncelet justified his use of his continuity principle by arguing that it was inherent to much of mathematical practice, by showing that it was used in synthetic geometry, in infinitesimal geometry and in analysis, whether explicitely or not. Poncelet's epistemology is clearly an epistemology of generalisation; the principles that form the basis of his mathematical work are not justified in terms of a search for rigor — unlike those of Gauss or Cauchy — but by their ability to generalise geometrical situations.

Von Staudt's main motivation was to justify the introduction of projective coordinates by projective arguments, in an attempt to demonstrate the anteriority of the synthetic approach in relation to analytical geometry, thus taking part in the organisation and delineation of the various mathematical fields. This research project betrays his perception of mathematics as a field organised in a hierarchy of various mathematical sub-fields. Such an understanding of mathematics emerged in the first half of the 19th century.

Bolzano's and Cauchy's demand for rigor can be viewed as an attempt to rid analysis of geometrical intuitions, in order to ensure its autonomy and its paradigmatic character.

Pasch's and Pieri's work, and, generally speaking, the work of all mathematicians who proposed axiomatics of projective geometry, represented ways of grappling with the issue of foundations. Yet most of their work and even sometimes their method were motivated by philosophical considerations. For instance Pasch justifies the axiomatic character of his discourse in his treaty *Vorlesungen über neuere Geometrie* on the basis of his empiricist views.

Grasmann's geometrical research constitutes another significant example. It is impossible to fully understand, in all its subtility, his *Ausdehnungslehre* (elaborated from the 1830s to the 1860s), which laid the abstract foundations for linear and multilinear algebra, without taking into account the influence of the philosophies of nature, of Grassmann's background in philology, and of Hindenburg’s school on combinatorial mathematics and its impact on the educational reform in the teaching of mathematics in Germany during the 19th century.

Also, at the end of the 19th century, the confrontation between the algebraic and the geometrical approaches in the *Analysis Situs* compelled mathematicians to consider the possibility of producing geometrically hitherto algebraically constructed objects. The development of this mathematical field during the period can be viewed as a dialectical movement between the elaboration and analysis of examples on the one hand, and the abstraction of structures on the other.

Geometry, having been strongly influenced by the philosophical problem of space, shall be of particular interest to us. During the 19th century, arithmetics and analysis also underwent upheavals which implied rethinking the foundations of these fields. Some mathematicians even went as far as claiming that the 19th century was *unter dem Zeichen der Zahl* (Hilbert 1897, Poincaré 1900). Indeed, since the begining of the 19th century with Gauss, several attempts had been made to rethink pure mathematics starting from the concept of number, attempts that were to lead to important developments in number theory, in algebra and in the theory of functions, and would eventually give rise to the program of "arithmetization" of mathematics; this trend first arose in Germany (Gauss, Weierstrass, Dedekind, Kronecker), but eventually came to influence the whole mathematical world (for instance, in France, Hermite and his followers*.* The notion that integers may constitute the foundation of pure mathematics was essential to rigor but also in order to redraw the map of mathematical fields. For instance, number theory grew during the 19th century from an almost marginal subfield to a paradigmatic field, as attested by the importance that Hilbert grants it in his list of problems (1900).

Moreover, the diffusion of the arithmetization program varied greatly according to the fields; numerous variants in the way it was accepted and understood, according to mathematicians and schools, can be detected and analysed. For instance, Kronecker's position with respect to the issue of foundations cannot be reduced to the famous sentence "*Gott hat die Zahlen gemacht, alles andere ist Menschenwerk*". On the contrary, he held original views which formed a coherent doctrine, justified by epistemological convictions, and which cannot be reduced to any one of the three kinds of foundations usually identified by historians (logicism, formalism and intuitionism). This doctrine is notably presented in an article on the concept of number (1887) and, especially, in the last series of lectures that Kronecker gave in Berlin in 1891.

While a certain form of arithmetics was achieving paradigmatic status within mathematics, the rise of analytical methods in number theory and the emergence of arithmetical geometry were viewed by many mathematicians (especially in France, Italy and England) as a possible pathway towards the unification of mathematics, making it possible for number theory to find its place within the framework of the main developments in mathematics. The study of these circumstances and of the tension between these two phenomena is one of the central themes of our proposed study: did the mathematicians involved in the program of arithmetization welcome, and if so how did they intergrate the geometrization of part of arithmetics or the use of infinitesimal techniques within the field of number theory (especially concerning integers)? Also, how did the advocates of these new trends understand the issue of foundations? How was the issue of the unity of mathematics related to that of its foundations?

On the outskirts of mathematics, the notion of universal language played a fundamental part in the philosophy of formal sciences in the 19th century, by providing an epistemological basis for the notion of unity in mathematics and/or by providing a justification for the concept of foundations of mathematics. Two epistemological traditions can be seen, *i.e*. "logic as computation" (Boole, Pierce, Schreder) and "logic as language" (Frege). According to the former view, formal systems may be applied to several fields, whereas according to the latter, they are of universal relevance as a matter of necessity.

The present project aims to study as throroughly as possible the issue of the foundations in 19th century mathematics and to better understand how the notion of foundations was conceived, how the epistemological issues pertaining to the very meaning of this concept were understood; what perception of mathematics, of mathematical practice and of the position held by mathematics within the general body of knowledge the emergence of this issue required. Our work shall revolve around several themes and objectives:

- to take a fresh look at and offer a new interpretation of the history of the arithmetization of mathematics, in order to reveal the diversity of the actors' understanding and practices.
- to analyse why the foundations became an issue when set theory encountered paradoxes. To understand why (and in which respect) the whole structure of mathematics appeared to be threatened, whereas the question of paradoxes could very well have remained (and, in fact, did remain) "confined" to set theory alone.
- to reevaluate the role that 19th century mathematicians granted intuition, notably with respect to problems on existence.
- to stress the part played by epistemological outlooks and metaphysical views in the way issues were defined, methods chosen, and theories presented. In particular, we shall set out to show how the mathematicians' philosophical *a priori* influenced their approach to the justification of their work.
- especially, to analyse the role played by the epistemology of generalisation in the delineation of mathematical fields, and by the ideology of the unity of mathematics in the emergence of the issue of the foundations and in the contemporary perception of mathematics.

Finally, considerations pertaining to the foundations and justification of mathematical theories were by no means absent from conceptions regarding education, and influenced both official writings (programs, teaching, etc...) and textbooks at all levels of the educational system. Generally speaking, we shall examine the part played by the cultural context (philology, evolution, classification of the sciences, emergence of social sciences, questions relative to how perception and knowledge are related, due to progress in physiology) as well as the philosophical context (arrival in France of Kant's philosophy, influence of positivist views, etc...)

The research project we are putting forward is meant as a continuation to the conference " *Aperçus philosophiques en logique et en mathématiques*: *Histoire et actualité des théories sémantiques et syntaxiques alternatives* ", [Philosophical Survey of Logic and Mathematics: History and Current Issues in Alternative Semantic and Syntactical Theories" (Nancy, september 2002) part of which (organised by D. Flament et P. Nabonnand) was devoted to an historical approach to the issue of the foundations of mathematics. Most research team members (J. Boniface, J. Ferreiros, D. Flament, C. Goldstein, J. Legris, P. Nabonnand) made a contribution during this session. The present project shall be prepared by a weekly lecture given by D. Flament, P. Nabonnand and K. Volkert at the university of Nancy 2 (winter semester 2004) on the occasion of K. Volkert's stay (sabaticcal semester) at the *Archives Poincaré* in Nancy.

Besides holding a daily seminar for the benefit of the team members and leading reading sessions, we intend organising two conferences, which will give us the opportunity to extract the essential facts from the team's results. Weekly meetings devoted to the historiography and epistemology of mathematics will allow us to determine a project and the outline of a book on the history of the notion of foundations in mathematics.

Duration: 3 months , either January-March or April May 2004

Program and method:

- 1 conference per day, for the exclusive benefit of the team members (*i.e*. 1 conference per week and per participant)
- reading sessions
- meetings devoted to the historiography and epistemology of 19th century history of mathematics (once a week)
- organisation of 2 public workshops at the end of the 3 months period (theme to be decided)
- preparation of a plan and allocation of work for the writing of a book

Mid-term objective: A book devoted to the study of the various contexts (mathematical, philosophical, cultural, educational) that pertain to the issue of the foundations of mathematics in the 19th century.

Long-term objective: to constitute a research team dedicated to 20th century mathematics and their connections with other sciences and social sciences, and which will strengthen the emerging network devoted to Mathematics, Physics, Philosophy, History of Science and Cognition.

Annexe n°5 : Adresses postale et électronique des membres du groupe

- Dominique Flament
  Equipe F2DS, Maison des Sciences de l'Homme
  54, Boulevard Raspail
  F-75 270 Paris cedex 06

  flament@msh-paris.fr

- Philippe Nabonnand
  LPHS – Archives Poincaré
  23, Bd Albert 1er
  F-54 015 Nancy cedex

  Philippe.Nabonnand@univ-nancy2.fr

- Jacqueline Boniface
  Département de Philosophie
  Université Nice Sophia-Antipolis
  98, Bd Edouard Herriot - B.P. 3209
  F-06204 Nice Cedex 3

  jaboniface@wanadoo.fr

- José Ferreiros
  Deparmento de Filosofia y Logica
  Universidad de Sevilla Camilo Jose Cela,
  E-41018 Sevilla

  josef@us.es

- Sébastien Gauthier
  Institut mathématique de Jussieu
  175, rue du Chevaleret
  F-75 013

  gauthier@math.jussieu.fr

- Catherine Goldstein
  Institut mathématique de Jussieu
  175, rue du Chevaleret
  F-75 013

  catherine.goldstein@wanadoo.fr

- Javier Legris
  Instituto de Investigaciones Administrativas,
  Facultad de Ciencias Económicas,
  Universidad de Buenos Aires
  Cordoba 2122,
  Ciudad de Buenos Aires

  jlegris@mail.retina.ar

- Klaus Volkert
  Hochstrasse 48
  D-66 450 Bexbach

  fam.volkert@t-online.de